

Riemannsche Geometrie

Übungsblatt 1

Wintersemester 2009/2010

Aufgabe 1. \mathbb{R} als Mannigfaltigkeit.

Durch die Abbildungen

$$\varphi_1 := \text{id}_{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad \varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3$$

werden zwei differenzierbare Strukturen \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 auf der topologischen Mannigfaltigkeit \mathbb{R} definiert. Zeigen Sie, dass einerseits $\mathcal{A}_1 \neq \mathcal{A}_2$ gilt, aber andererseits die Mannigfaltigkeiten $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_1)$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_2)$ diffeomorph sind.

Aufgabe 2. Differenzierbarer Atlas auf $P^n\mathbb{R}$.

Sei $P^n\mathbb{R}$ der n -dimensionale reell projektive Raum.

Zeigen Sie, dass

$$\{(U_i, \varphi_i) : i = 1, \dots, n+1\}$$

mit

$$U_i := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_i \neq 0\}$$

und den Karten

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad [(x_1, \dots, x_{n+1})] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

ein differenzierbarer Atlas von $P^n\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 3. Würfel.

- Seien M ein topologischer Raum, N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow N$ ein Homöomorphismus. Definieren Sie eine differenzierbare Struktur auf M , so dass f ein Diffeomorphismus zwischen den Mannigfaltigkeiten M und N wird.
- Kann man auf dem Einheitswürfel (als Teilraum des \mathbb{R}^n)

$$W := \{x \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1\}$$

eine differenzierbare Struktur \mathcal{A} definieren, so dass (W, \mathcal{A}) eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist?