Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl. Math. Johannes Riesterer

Riemannsche Geometrie

Übungsblatt 3 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Torus und Produktmannigfaltigkeiten.

Seien $(M^m, \mathcal{A}_M)$ und $(N^n, \mathcal{A}_N)$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Atlanten $\mathcal{A}_M := \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ und $\mathcal{A}_N := \{(V_j, \psi_j)\}_{j\in J}$. Wir definieren $h_{ij} : U_i \times V_j \to \mathbb{R}^{m+n},\ (p,q) \mapsto (\varphi_i(p), \psi_j(q))$.

(a) Zeigen Sie, dass $\{(U_i \times V_j, h_{ij})\}_{(i,j)\in I\times J}$ ein differenzierbarer Atlas für $M \times N$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass es für den Rotationstorus

$$T := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2 + z^2 = r^2\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

mit $0 < r < a$ einen differenzierbaren Atlas $\mathcal{A}$ gibt.

(c) Finden Sie einen Diffeomorphismus von T auf die Produktmannigfaltigkeit $S^1 \times S^1$. Dabei bezeichnen wir mit S^1 die Einheitskreisline $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ im $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2. Transformationsformel.

Seien M^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\varphi : U \to U' \subset \mathbb{R}^n,\ q \mapsto (x^1(q), \dots, x^n(q))$ sowie $\psi : V \to V' \subset \mathbb{R}^n,\ q \mapsto (y^1(q), \dots, y^n(q))$ Karten von M mit $p \in U \cap V$.

(a) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1})\big|_{\varphi(p)}$ eine Derivation ist.

(b) Beweisen Sie die Transformationsformel:

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(x^j \circ \psi^{-1})}{\partial y^i}(\psi(p))\ \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p .$$

Hierbei bezeichnen wir mit $\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p$ die Basisderivationen bezüglich der Karte (V, ψ).

Aufgabe 3. Geometrische Definition des Tangentialraums.

Seien M^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $c_i : (-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \to M$ $(i = 1,2)$ differenzierbare Kurven mit $c_i(0) = p \in M$. Die Kurven c_1 und c_2 heißen *äquivalent* $(c_1 \sim c_2)$, falls eine Karte (U, φ) mit $p \in U$ existiert, so dass

$$\frac{d(\varphi \circ c_1)}{dt}(0) = \frac{d(\varphi \circ c_2)}{dt}(0).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der C^∞-Kurven c mit $c(0) = p$ definiert. Jede Äquivalenzklasse $[c]$ heißt *(geometrischer) Tangentialvektor* an M in p. Die Menge der geometrischen Tangentialvektoren $T_p^{\mathrm{geo}}M$ in p heißt *(geometrischer) Tangentialraum* von M in p.

Bitte wenden.

(b) Sei (U, φ) eine Karte an $p \in M$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$A : T_p^{\text{geo}} M \to \mathbb{R}^n,\ [c] \mapsto \frac{d(\varphi \circ c)}{dt}(0)$$

bijektiv ist.
$T_p^{\text{geo}} M$ lässt sich dann zu einem n-dimensionalen Vektorraum machen:

$$\lambda_1[c_1] + \lambda_2[c_2] := A^{-1}(\lambda_1 A[c_1] + \lambda_2 A[c_2]\ ).$$

Diese Vektorraumstruktur ist unabhängig von der Wahl der Karte (U, φ). (Beweis?)

(c) Wir definieren die Abbildung

$$\Phi : T_p^{\text{geo}} M \to T_p M,\ [c] \mapsto X_{[c]} \quad \text{mit} \quad X_{[c]}(g) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g \circ c(t),\ g \in C^\infty(p).$$

Zeigen Sie, dass $X_{[c]}$ eine Derivation und Φ ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

Abgabe der Lösungen bis zum **Freitag**, den 6. 11. 2009 um 8:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 1C-04 im Alianzgebäude. Die Abgabe darf auch in Zweiergruppen erfolgen. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe jeweils *Name* und *Matrikelnummer*. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter **http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/riemanngeo2009w/de** zum Download bereit.