Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl. Math. Johannes Riesterer

# Riemannsche Geometrie

**Übungsblatt 3** **Wintersemester 2009/10**

---

## Aufgabe 1. Reguläre Untermannigfaltigkeiten.

Sei $(N^n, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $M \subset N$ (versehen mit der Spurtopologie) heißt *$m$-dimensionale reguläre Untermannigfaltigkeit* von $N$, falls es zu jedem $p \in M$ eine Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ mit $p \in U$ gibt, so dass folgendes gilt:

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}), \quad (m \leq n).$$

Jede solche Karte $(U, \varphi)$ nennt man *eine an $M$ angepasste Karte.*
Sei weiter $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Projektion $\pi(x^1, \ldots, x^n) := (x^1, \ldots, x^m)$.

Zeigen Sie, dass

$$\{(U \cap M, \pi \circ \varphi|_{U \cap M}) \ : \ (U, \varphi) \in \mathcal{A} \text{ an } M \text{ angepasste Karte } \}$$

ein Atlas von $M$ ist. Hierdurch wird $M$ zu einer $m$-dimensionalen Mannigfaltigkeit.
Zeigen Sie weiter, dass die Inklusionsabblidung $\iota : M \to N, p \mapsto p$ differenzierbar ist.

## Aufgabe 2. Überlagerung des Torus

Sei $R^2/\mathbb{Z}^2 := R^2/\sim$ wobei $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 - y_1 \in \mathbb{Z}$ und $x_2 - y_2 \in \mathbb{Z}$.

- Definieren Sie einen Homöomorphismus $f : R^2/\mathbb{Z}^2 \to T^2 := S^1 \times S^1$. Dadurch erhalten Sie eine differenzierbare Struktur auf $R^2/\mathbb{Z}^2$, so dass $f$ ein Diffeomorphismus ist (Siehe erstes Übungsblatt).
- Sei $\pi : \mathbb{R}^2 \to R^2/\mathbb{Z}^2$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass $\pi$ eine differenzierbare Abbildung und ein lokaler Diffeomorphismus ist (bezüglich genannter differenzierbarer Struktur).
- Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ eine offene Umgebung $U$, eine Indexmenge $I$ und disjunkte offene Mengen $U_i \subset \mathbb{R}^2$ existieren, so dass $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$ und $\pi_{|U_i} : U_i \to U$ ein Diffeomorphismus ist. Man nennt $\pi$ eine Überlagerung.
- Sei $a, b \in \mathbb{R}$ und $\gamma := \{(ta, tb) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass das Bild von $\gamma$ unter $\pi$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ist, wenn $b = 0$ oder $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

## Aufgabe 3. n-Sphäre als Untermannigfaltigkeit

Sei $f : M^m \to N^n$ eine differenzierbare Abbildung.
$p \in M$ heißt **regulärer Punkt** von $f$, falls $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ surjektiv ist.
$q \in N$ heißt **regulärer Wert** von $f$, wenn jeder Punkt in $f^{-1}(q) \subset M$ regulär ist.

Es gilt der folgende
**Satz**: *Falls $q \in N$ ein regulärer Wert von $f$ ist, so ist $f^{-1}(q)$ eine $(m-n)$–dimensionale Untermannigfaltigkeit von $M$.*
(Beweis: Bröcker/ Jänich, Einführung in die Differentialtopologie, 1973, Seite 51.)

Beweisen Sie mittels dieses Satzes, dass die $n$–Sphäre

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

eine (differenzierbare) $n$–dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

---

**Abgabe** der Lösungen bis zum **Freitag**, den 12. 11. 2009 um 08:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 1C-04 im Alianzgebäude. Die Abgabe darf auch in Zweiergruppen erfolgen. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe jeweils *Name* und *Matrikelnummer*.