Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl. Math. Johannes Riesterer

Riemannsche Geometrie

Übungsblatt 4 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Lie-Gruppen.

(a) Zeigen Sie, dass die Gruppe

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \;:\; \det(A) = 1\}$$

eine reguläre Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

(b) Zeigen Sie für die Gruppe $G = SL(n,\mathbb{R})$, dass die Gruppenmultiplikation

$$\mu : G \times G \to G,\; (A,B) \mapsto A \cdot B$$

sowie die Inversenbildung

$$\iota : G \to G,\; A \mapsto A^{-1}$$

differenzierbare Abbildungen sind.
Bemerkung: Differenzierbare Mannigfaltigkeiten, die eine Gruppenstruktur mit den Eigenschaften aus (b) zulassen, nennt man *Lie-Gruppen*.

Aufgabe 2. Tangentialräume von regulären Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$.

(a) Sei M eine reguläre Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$\mathcal{T}_p M := \{p\} \times \{c'(0) \mid c : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M \text{ differenzierbar mit } c(0) = p\;\}.$$

Zeigen Sie, dass dieser Vektorraum isomorph zu dem geometrischen Tangentialraum $T_p^{\mathrm{geo}}M$ ist. Insbesondere sind somit die Vektorräume $\mathcal{T}_pM, T_p^{\mathrm{geo}}M$ und T_pM isomorph. Aufgrund dieser Tatsache bezeichnet man jeden dieser Vektorräume als Tangentialraum von M in p.

(b) Zeigen Sie, dass die Lie-Gruppe $G = SL(n,\mathbb{R})$ im Punkt E (E die Einheitsmatrix) den Tangentialraum

$$\mathcal{T}_E G := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \operatorname{spur}(A) = 0\}$$

hat.

Bitte wenden.

Aufgabe 3. Lagrange-Multiplikatoren.

Wir verwenden in dieser Aufgabe das euklidische Standardskalarprodukt

$$\langle (p,v),(p,w)\rangle := \sum_{i=1}^{n} v^i w^i$$

für Tangentialvektoren (p,v) und $(p,w) \in \mathcal{T}_p\mathbb{R}^n$.

(a) Seien $F : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ eine differenzierbare Abbildung und $c \in F(V)$. Weiter habe das Differential dF_p für alle $p \in M := F^{-1}(c)$ den Rang l . Dann ist M eine reguläre Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass die Tangentialvektoren $(p, \operatorname{grad} F^i(p)) \in \mathcal{T}_p\mathbb{R}^n$ senkrecht auf dem Tangentialraum $\mathcal{T}_pM$ stehen und eine Basis des Normalenraums $(\mathcal{T}_pM)^\perp$ bilden.

(b) Die Funktion $g : M \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und habe ein lokales Extremum an der Stelle $p \in M$. Zeigen Sie, dass $(p, \operatorname{grad} g) \in (\mathcal{T}_pM)^\perp$ gilt. Folgern Sie hieraus, dass es Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

$$\operatorname{grad} \left(g - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i F^i \right)(p) = 0.$$

(c) **Anwendung: Quadratische Formen.** Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $M := S^{n-1}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$. Begründen Sie, dass die Funktion

$$g : M \to \mathbb{R}, x \mapsto x^\top Ax$$

an einer Stelle $x_0 \in M$ ihr Maximum m annimmt. Zeigen Sie weiter, dass jede solche Maximalstelle x_0 von g ein Eigenvektor von A mit Eigenwert m ist. Analoges gilt für Minimum und Minimalstellen.

Abgabe der Lösungen bis zum **Freitag**, den 20. 11. 2009 um 08:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 1C-04 im Alianzgebäude. Die Abgabe darf auch in Zweiergruppen erfolgen. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe jeweils *Name* und *Matrikelnummer*.