Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl. Math. Johannes Riesterer

Riemannsche Geometrie

Übungsblatt 5 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Einbettung von $P^2\mathbb{R}$.

Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$F(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)\,.$$

Weiter sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre, und $f = F|S^2$ die Einschränkung von F auf S^2. Betrachten Sie die Abbildung $g :\ P^2\mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$g([p]) = f(p)\,,$$

wobei $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, und $[p] = \{p, -p\}$ die Äquivalenzklasse von p ist. Zeigen Sie:

a) g ist wohldefiniert und injektiv.
b) g ist eine Immersion.
c) g ist eine Einbettung.

Aufgabe 2. Lokale Isometrie.

Die **Traktrix** (Schleppkurve) kann parametrisiert werden durch

$$c : I := (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$$
$$c(t) := (t - \tanh t, 0, \frac{1}{\cosh t})\,.$$

Die **Pseudo–Sphäre** ist die Fläche in $\mathbb{R}^3$, die man aus $c(I)$ durch Rotation um die x–Achse erhält (mit der von $\mathbb{R}^3$ induzierten Riemannschen Metrik).
Die **hyperbolische Ebene** ist die obere Halbebene $H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ mit der Riemannschen Metrik

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

Beweisen Sie, dass die Pseudo–Sphäre lokal isometrisch ist zur hyperbolischen Ebene.

Aufgabe 3. Interpretation der Lie-Klammer.

Seien X ein Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M und $p \in M$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subset M$ von p und ein $\delta = \delta(p) > 0$, so dass die Abbildung

$$\phi : (-\delta, \delta) \times U \to M, (t, q) \mapsto c_q(t)$$

differenzierbar ist. Hierbei sei $c_q : (-\delta, \delta) \to M$ die Integralkurve von X mit $c_q(0) = q$. ϕ heißt *lokaler Fluss* des Vektorfeldes X.
Sei Y ein weiteres Vektorfeld auf M. Zeigen Sie, dass dann für alle $p \in M$ gilt:

$$[X, Y]\,(p) = \lim_{t \to 0} \frac{Y_p - (d\phi_t)Y_{\phi_{-t}(p)}}{t}, \quad \text{mit} \quad \phi_t : M \to M,\ p \mapsto \phi(t, p). \qquad (*)$$

(Ableitung von Y längs des Flusses von X.)
Hinweise. Zeigen Sie zuerst, dass es zu einer differenzierbaren Funktion $h : (-\delta, \delta) \times U \to \mathbb{R}$ mit $h(0, q) = 0$ für alle $q \in U$ eine differenzierbare Funktion $g : (-\delta, \delta) \times U \to \mathbb{R}$ mit $h(t, q) = tg(t, q)$ gibt. Wenden Sie dann $(*)$ auf ein $f \in C^\infty(M)$ an und betrachten Sie $h(t, q) := f \circ \phi_t(q) - f(q)$.

Abgabe der Lösungen bis zum **Freitag**, den 27. 11. 2009 um 08:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 1C-04 im Alianzgebäude. Die Abgabe darf auch in Zweiergruppen erfolgen. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe jeweils *Name* und *Matrikelnummer*.