Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl. Math. Johannes Riesterer

Riemannsche Geometrie

Übungsblatt 6 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Isometrien.

(a) Zeigen Sie, dass ein Diffeomorphismus $F : (M, g) \to (N, h)$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten genau dann eine Isometrie ist, wenn F die Länge jeder differenzierbaren Kurve $c : [a, b] \to M$ invariant lässt: $L(c) = L(F \circ c)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Isometrien $F : M \to M$ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bilden. Diese Gruppe $\mathrm{Isom}(M)$ heißt *Isometrie-Gruppe* von M.

(c) Wir betrachten die *hyperbolische Ebene* (H^2, g) mit

$$H^2 := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

und der Metrik g, definiert bzgl. der Karte id durch

$$(g_{ij}(z)) := \frac{1}{\mathrm{Im}(z)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc = 1$ die Abbildungen

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Isometrien von H^2 sind.

Aufgabe 2. Affiner Zusammenhang.

Seien $M := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und D der kanonische, von $\mathbb{R}^2$ induzierte, Zusammenhang auf M. Die Vektorfelder E_1 und E_2 seien die Basisfelder bezüglich der Karte $(\mathbb{R}^2, \mathrm{id})$. Wir definieren die Vektorfelder X und Y auf M für $p = (x, y)$ durch

$$X(p) := -yE_1(p) + xE_2(p) \quad \text{und} \quad Y(p) := \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(xE_1(p) + yE_2(p)).$$

Berechnen Sie $D_X Y$ sowie $D_Y X$.

Bitte wenden.

Aufgabe 3. Zusammnenhang des $\mathbb{R}^n$.

Seien $(\mathbb{R}^n, \varphi)$ eine Karte des $\mathbb{R}^n$ und $\frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \ldots, n$, die zugeörigen Basisvektorfelder. Wir definieren folgendermaßen einen Zusammenhang D des $\mathbb{R}^n$: Für Vektorfelder X und $Y = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ sei

$$D_X Y := \sum_{i=1}^n X(a^i) \frac{\partial}{\partial x^i} .$$

Sei $(\mathbb{R}^n, \psi)$ eine weitere Karte mit zugehörigen Basisfeldern $\frac{\partial}{\partial y^i}, i = 1, \ldots, n$. Wir definieren analog einen Zusammenhang D' durch

$$D'_X Y := \sum_{i=1}^n X(b^i) \frac{\partial}{\partial y^i}$$

für $Y = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial y^i}$.

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $D = D'$,

(ii) für alle i, j gilt:

$$\frac{\partial^2(\varphi \circ \psi^{-1})}{\partial x^j \partial y^i} = 0,$$

(iii) der Koordinatenwechsel $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine affine Abbildung.

Abgabe der Lösungen bis zum **Freitag**, den 04. 12. 2009 um 08:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 1C-04 im Alianzgebäude. Die Abgabe darf auch in Zweiergruppen erfolgen. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe jeweils *Name* und *Matrikelnummer*.