Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl. Math. Johannes Riesterer

Riemannsche Geometrie

Übungsblatt 7 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Isometrien, Levi-Civita-Zusammenhang und Geodätische.

Seien M und N Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Levi-Civita-Zusammenhängen D und D'. Weiter sei $F : M \to N$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass F den Levi-Civita-Zusammenhang D in folgendem Sinne erhält:

$$dF(D_X Y) = D'_{dF(X)} dF(Y), \qquad \text{für alle } X, Y \in \mathcal{VM}.$$

Wieso folgt hieraus, dass Isometrien Geodätische auf Geodätische abbilden?

Aufgabe 2. Christoffel-Symbole.

Seien (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\lambda : M \to (0, \infty)$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist $\tilde{g} := \lambda \cdot g$ ebenfalls eine Riemannsche Metrik auf M.

(a) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ bezüglich $\tilde{g}$ in Abhängigkeit von g, λ und den Christoffel-Symbolen Γ_{ij}^k bezüglich g.

(b) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole der hyperbolischen Ebene

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

bezüglich der Karte (H^2, id).

Aufgabe 3. Geodätische von H^2.

(a) Stellen Sie die Differentialgleichung für Geodätische der hyperbolischen Ebene H^2 auf und zeigen Sie, dass die y-Achse das Bild einer Geodätischen ist. Hierzu müssen Sie zuerst eine geeignete Parametrisierung der y-Achse finden.

(b) Zeigen Sie: Genau die (geeignet parametrisierten) Halbgeraden senkrecht zur x-Achse und die Halbkreise mit Mittelpunkt auf der x-Achse sind die Geodätischen der hyperbolischen Ebene.

(c) Wieso ist das euklidische Parallelenaxiom in der hyperbolischen Ebene (für "Geraden" $\equiv$ Geodätische) nicht erfüllt?

Abgabe der Lösungen bis zum **Freitag**, den 11. 12. 2009 um 08:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 1C-04 im Alianzgebäude. Die Abgabe darf auch in Zweiergruppen erfolgen. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe jeweils *Name* und *Matrikelnummer*.