Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl. Math. Johannes Riesterer

Riemannsche Geometrie

Übungsblatt 8 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Verzerrtes Produkt.

Gegeben sei eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) und der 1-dimensionale euklidische Raum $(\mathbb{R}, h)$ sowie eine differenzierbare, nullstellenfreie Funktion
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Produkt-Mannigfaltigkeit $\tilde{M} := M \times \mathbb{R}$ wird nun mit folgender Metrik $\tilde{g}$ versehen:

$$\tilde{g}_{(p,t)}(v_1 + v_2, w_1 + w_2) := f^2(t) \cdot g_p(v_1, w_1) + h_t(v_2, w_2)$$

für $v_1, w_1 \in T_pM$ und $v_2, w_2 \in T_t\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) $\tilde{g}$ ist eine Riemannsche Metrik auf $\tilde{M}$.

b) Für jedes $p \in M$ ist die Kurve $c : \mathbb{R} \to \tilde{M}$, $t \mapsto (p, t)$ eine Geodätische von $(\tilde{M}, \tilde{g})$.

c) Welche Bedingung muss f erfüllen, damit für jede Geodätische $s \mapsto c(s)$ von (M, g) auch $s \mapsto (c(s), t)$ eine Geodätische von $(\tilde{M}, \tilde{g})$ ist?

Aufgabe 2. Schwarzschild-Halbebene.

Ersetzt man in der Definition einer Riemannschen Metrik auf einer Mannigfaltigkeit M den Begriff *positiv definit* durch *nicht-ausgeartet*, d.h. in jedem Punkt $p \in M$ gilt

$$\forall\, v \in T_pM : g_p(u, v) = 0 \implies u = 0,$$

so erhält man den Begriff einer **Pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit**. Satz 3 in Abschnitt 3.3 der Vorlesung über den Levi-Civita-Zusammenhang gilt dann analog auch für Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Insbesondere kann man in solchen Mannigfaltigkeiten ebenfalls Geodätische definieren. Dazu ein Beispiel...

Die **Schwarzschild-Halbebene** ist definiert als $SH = \{(t, r) \in \mathbb{R}^2 \mid r > r_0\}$ mit der Metrik

$$(g_{ij})_{(t,r)} = \begin{pmatrix} \frac{r_0 - r}{r} & 0 \\ 0 & \frac{r}{r - r_0} \end{pmatrix} \quad \text{(bzgl. id als Karte).}$$

Dabei ist die Konstante $r_0 > 0$ der sogenannte **Schwarzschild-Radius**. Zeigen Sie:

a) Die Abbildungen $\Phi_b^{\pm} : \begin{cases} SH & \to & SH \\ (t, r) & \mapsto & (\pm t + b, r) \end{cases}$ für $b \in \mathbb{R}$ sind Isometrien von SH.

b) Für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ ist $\{(t_0, r) \in SH \mid r \in (r_0, \infty)\}$ Bild einer Geodätischen von SH.

Abgabe der Lösungen bis zum **Freitag**, den 18. 12. 2009 um 08:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 1C-04 im Alianzgebäude. Die Abgabe darf auch in Zweiergruppen erfolgen. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe jeweils *Name* und *Matrikelnummer*.