Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl. Math. Johannes Riesterer

Riemannsche Geometrie

Übungsblatt 9 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Die Exponentialabbildung.

Sei M eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit (mit Levi-Civita-Zusammenhang) und

$$\begin{aligned} F : U \subset TM &\to M \times M \\ (q, v) &\to (q, exp_q v) \ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für das Differential von F in $(p, 0) \in U$ gilt:

$$dF_{(p,0)} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & E \end{pmatrix},$$

wobei E die n-dimensionale Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 2. Die Lie-Gruppe SO(n).

Zeigen Sie folgende Aussagen:

1. $SO(n) := O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$ ist die Zusammenhangskomponente von $O(n)$, die die Einheitsmatrix E enthält. Folgern Sie hieraus, dass $SO(n)$ eine Lie-Gruppe ist.
2. Für alle $P \in SO(n)$ gilt: $T_P SO(n) := \{PX : X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X = -X^t\}$.
3. Durch
$$g_P(X, Y) := Spur(P^{-1}X(P^{-1}Y)^t), \ P \in SO(n); \ X, Y \in T_P SO(n)$$
wird eine Riemannsche Metrik auf $SO(n)$ definiert.
4. Diese Riemannsche Metrik ist biinvariant, d.h.
$$g_{AP}(AX, AY) = g_P(X, Y) = g_{PA}(XA, YA)$$
für alle $A, P \in SO(n)$ und $X, Y \in T_P SO(n)$. Die Linksmultiplikation $L_A : SO(n) \to SO(n), \ P \to PA$ und die Rechtsmultiplikation $L_R : SO(n) \to SO(n), \ P \to AP$ sind dann Isometrien.
5. Seien X, Y linksinvariante Vektorfelder auf $SO(n)$, d.h. $X_P = PX_E$ und $Y_P = PY_E$ für $P \in SO(n)$. Dann gilt für den Levi-Civita-Zusammenhang D von g
$$D_X Y = \frac{1}{2}[X, Y] \ .$$
6. Die Geodätischen von $(SO(n), g)$ durch E sind genau die Kurven
$$\begin{gathered} c_X : \mathbb{R} \to SO(n) \\ c_X(t) = e^{tX} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tX)^j}{j!} \ . \end{gathered}$$

Wir wünschen ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr.