Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl. Math. Johannes Riesterer

Riemannsche Geometrie

Übungsblatt 11 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Schnittkrümmung

Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\sigma \in T_pM$ ein 2-dimensionaler Unterraum mit Basis $\{u, v\}$. Zeigen Sie, dass die Schnittkrümmung

$$K(p,\sigma) := \frac{< R(u,v)u, v >_p}{|u \wedge v|^2}$$

wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der Basis ist.

Aufgabe 2. Lie-Gruppen mit bi-invarianter Metrik.

Sei G eine Lie-Gruppe mit bi-invarianter Riemannscher Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$, d.h. die Abbildungen $L_a : G \to G, g \mapsto ag$ und $R_a : G \to G, g \mapsto ga$ sind für alle $a \in G$ Isometrien.

(a) Seien X und Y linksinvariante Vektorfelder auf G, d.h. für alle $g \in G$ gilt $X_g = dL_g|_e X_e$ bzw. $Y_g = dL_g|_e Y_e$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$D_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

Sie dürfen verwenden, dass für linksinvariante Vektorfelder X, Y, Z und eine bi-invariante Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ folgendes gilt:

$$\langle [X, Y], Z \rangle = -\langle Y, [X, Z] \rangle.$$

(b) Zeigen Sie, dass für linksinvariante Vektorfelder X, Y, Z gilt:

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4}[[X, Y], Z].$$

(c) Seien $X_e, Y_e \in T_eG$ orthonormal. Zeigen Sie, dass für die Schnittkrümmung im Punkt e

$$K_e(X_e, Y_e) = \frac{1}{4}||[X, Y]_e||_{T_eG}$$

gilt, wobei X und Y die linksinvarianten Vektorfelder mit $X(e) = X_e$ und $Y(e) = Y_e$ sind. Folgern Sie, dass die Schnittkrümmung überall nicht-negativ ist.

Aufgabe 3. Lokal symmetrische Räume.

Die kovariante Ableitung DR des Riemannschen Krümmungstensors R auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist ein $(1, 4)$-Tensorfeld mit

$$DR(X, Y, Z, W) := D_W\big(R(X, Y)Z\big) - R(D_W X, Y)Z - R(X, D_W Y)Z - R(X, Y)D_W Z$$

für $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}M$.

(a) Zeigen Sie, dass genau dann $DR = 0$ gilt, wenn für alle parallelen Vektorfelder X, Y, Z entlang einer (beliebigen) Kurve c auch das Vektorfeld $R(X, Y)Z$ auf c parallel ist.
Bemerkung: Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M mit $DR = 0$ heißt *lokal symmetrisch.*

(b) Zeigen Sie, dass jede Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung lokal symmetrisch ist.

Abgabe der Lösungen bis zum **Freitag**, den 22. 01. 2010 um 08:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 1C-04 im Alianzgebäude. Die Abgabe darf auch in Zweiergruppen erfolgen. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe jeweils *Name* und *Matrikelnummer.*