Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl. Math. Johannes Riesterer

Riemannsche Geometrie

Übungsblatt 12 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Starrheitssatz für Isometrien.

Es seien M, N Riemannsche Mannigfaltigkeiten, M zusammenhängend und $\Phi, \Psi : M \to N$ Isometrien, deren Differentiale in einem Punkt $p \in M$ übereinstimmen: $d\Phi_p = d\Psi_p$. (Insbesondere gilt dann $\Phi(p) = \Psi(p)$.) Zeigen Sie, dass dann diese Isometrien identisch sind:

$$\Phi = \Psi.$$

Hinweis. Zeigen Sie, dass die Menge $\{q \in M \ : \ d\Phi_q = d\Psi_q\}$ offen und abgeschlossen in M ist.

Aufgabe 2. Ricci-Krümmung und Skalar-Krümmung.

Seien $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt einen selbstadjungierten Endomorphismus $A : T_pM \to T_pM$ mit

$$Ricci_p(v, w) = \langle Av, w \rangle_p, \qquad (v, w \in T_pM).$$

(b) Für die Skalarkrümmung $S(p)$ in p gilt:

$$S(p) = \frac{1}{\mathrm{vol}(B^n)} \int_{S^{n-1}} Ricci_p(v, v)\, dv = \frac{n}{\mathrm{vol}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} Ricci_p(v, v)\, dv.$$

Hierbei bezeichne S^{n-1} die Einheitssphäre und B^n den Einheitsball in T_pM.

Hinweis. Fassen Sie die Abbildung $T_pM \to \mathbb{R}$, $v \mapsto Ricci_p(v, v)$ in geeigneter Weise als Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ auf und wenden Sie den Divergenzsatz (Gaußschen Integralsatz) an.

Aufgabe 3. Konstanter Schnittwinkel.

Sei M eine 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit folgender Eigenschaft:

Es existieren zwei Scharen von Geodätischen auf M, die sich in jedem Punkt unter konstantem Winkel ($\neq 0$) schneiden.

a) Geben Sie ein Beispiel für eine solche Mannigfaltigkeit an.

b) Beweisen oder widerlegen Sie:

M ist flach (d.h. $K(p) \equiv 0 \ \ \forall\, p \in M$).

Abgabe der Lösungen bis zum **Freitag**, den 29. 01. 2010 um 08:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 1C-04 im Alianzgebäude. Die Abgabe darf auch in Zweiergruppen erfolgen. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe jeweils *Name* und *Matrikelnummer*.