Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl. Math. Johannes Riesterer

Riemannsche Geometrie

Alles was einen Anfang hat, hat auch ein Ende. **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Homogene Räume.

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt *homogen*, falls die Isometriegruppe $\mathrm{Isom}(M)$ transitiv auf M operiert. D.h., zu je zwei Punkten $p, q \in M$ gibt es eine Isometrie $\Phi \in \mathrm{Isom}(M)$, so dass $\Phi(p) = q$.

Zeigen Sie, dass jede homogene Riemannsche Mannigfaltigkeit (geodätisch) vollständig ist.

Aufgabe 2. Geodätisch vollständig?

Auf der oberen Halbebene $H^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ definieren wir bzgl. der Karte (H^2, id) zwei Riemannsche Metriken g und h:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}, \qquad (h_{ij}) = \frac{1}{y^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Mengen
$$\{(x,y) \in H^2 : x = const.\}$$
Bilder von Geodätischen in (H^2, g) sind.

(b) Sind die Riemannschen Mannigfaltigkeiten (H^2, g) bzw. (H^2, h) geodätisch vollständig?

Aufgabe 3. Jacobi-Felder auf Mannigfaltigkeiten nichtpositiver Schnittkrümmung.

Seien $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : [0,a] \to M$ eine normale Geodätische. Ein Punkt $\gamma(t_0)$ mit $t_0 \in (0,a]$ heißt *konjugiert* zu $\gamma(0)$ (*längs* γ), falls es ein Jacobifeld $J \neq 0$ längs γ gibt, so dass $J(0) = J(t_0) = 0$.

(a) Der Punkt $\exp_p(X) \in M$ ist genau dann zu p längs der Geodätischen $\gamma(t) := \exp_p(tX)$ konjugiert, wenn $\ker(d\exp_p)_X \neq \{0\}$.

(b) Die Schnittkrümmung von M sei nichtpositiv und J sei ein Jacobi-Feld längs γ. Zeigen Sie, dass die Funktion
$$f : [0,a] \to \mathbb{R},\ t \mapsto ||J(t)||^2$$
konvex ist.

(c) Zeigen Sie, dass es auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit nichtpositiver Schnittkrümmung keine konjugierten Punkte gibt.

Abgabe der Lösungen bis zum **Freitag**, den 05. 02. 2010 um 08:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 1C-04 im Alianzgebäude. Die Abgabe darf auch in Zweiergruppen erfolgen. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe jeweils *Name* und *Matrikelnummer*.