Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dr. Sebastian Grensing

Seminar (Geometrie) **Sommersemster 2011**

CAT(0)-Räume

1 Längenräume und der Satz von Hopf-Rinow

In einem kurzen Rückblick auf metrische Räume sollen Geodätische, Winkel und Kurvenlänge definiert werden. Dies führt zu dem Begriff der inneren Metrik und des Längenraumes.

Wie das Beispiel der punktierten Ebene (mit der induzierten Metrik) zeigt, lassen sich Punkte von endlichem Abstand nicht immer durch eine Kurve verbinden, welche diesen Abstand als ihre Länge realisiert. Der Satz von Hopf-Rinow besagt, daß in vollständigen, lokal kompakten Längenräumen solche Verbindungen stets existieren.

[Bal95] I.1 – 2, [BBI99] 2, [BH99] I.1 & I.3

2 Isometrische Gruppenwirkungen und das Lemma von Švarc-Milnor

Nach einem kurzen Rückblick auf isometrische Gruppenwirkungen soll der Begriff der Quasiisometrie eingeführt und an einigen Beispielen erläutert werden.

Eine endlich erzeugte Gruppe kann auf zweierlei naheliegende Weisen als metrischer Raum aufgefasst werden: Nach Wahl eines Erzeugendensystem wird zum einen die Gruppe selbst vermöge der Wortmetrik zu einem metrischen Raum, zum anderen trägt der Cayley-Graph der Gruppe eine natürliche Metrik. Man sieht leicht ein, daß die auf den Ecken des Cayley-Graphen induzierte Metrik mit der Wortmetrik übereinstimmt. M. Gromov erzielte in den achziger Jahren große Erfolge damit, Gruppen in diesen Sinne als geometrische Objekte zu untersuchen. Ein früheres Ergebnis aus diesem Gebiet stellt das Lemma von Švarc-Milnor dar.

[BH99] I.8

3 Modellräume

Es existiert jeweils genau eine zusammenhängende, einfachzusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit M^n_κ der Dimension n mit konstanter Schnittkrümmung κ. Diese Modellgeometrien werden zur Definition von Krümmungsschranken für metrische Räume als Vergleichsräume dienen. Es sollen insbesondere M^n_0, M^n_1 und M^n_{-1}, die euklidische, sphärische und hyperbolische Geometrie, als metrische Räume eingeführt und ihre Geodätischen genau beschrieben werden.

[Bär10] 4.9, [BH99] I.2 & I.6

4 M_κ-Polyederkomplexe I

Zunächst soll hier beschrieben werden, wie neue metrische Räume aus gegebenen konstruiert werden können. Viele aus der Topologie bekannte Konstruktionen – etwa Produkte, Quotienten, Kegel und Amalgame – können in diesem Fall mir einer natürlichen Metrik versehen werden.

Desweiteren sollen, in Vorbereitung für den folgenden Vortrag, metrische simpliziale Komplexe und M_κ-Polyederkomplexe definiert und erste Eigenschaften diskutiert werden.

[BBI99] 3, [BH99] I.5 & I.7

5 M_κ-Polyederkomplexe II

Ziel dieses Vortrages ist es, den folgenden Satz von M. R. Bridson [Bri91] zu beweisen:

Ein M_κ-Polyederkomplex mit endlich vielen Isometrietypen von Zellen ist ein vollständiger geodätischer metrischer Raum.

[BH99] I.7, [Bri91]

6 Metrische Räume nichtpositiver Krümmung

Das Konzept der Krümmungsschranken metrischer Räume wurde von A. D. Alexandrov entwickelt. Es beruht auf der Beobachtung, daß ein geodätisches Dreieck auf einer nichtpositiv gekrümmten Mannigfaltigkeit „dünner“ ist, als ein Dreieck mit gleichen Kantenlängen im euklidischen Raum. In diesem Vortrag sollen der Begriff der (oberen) Krümmungsschranke eingeführt, $\mathrm{CAT}(0)$-Räume definiert und charakterisiert werden und eine Reihe von Beispielen diskutiert werden.

[Bal95] I.3, [BBI99] 9, [BH99] II.1

7 Konvexität

Eine wichtige Eigenschaft von $\mathrm{CAT}(0)$-Räumen ist die Konvexität ihrer Metrik. Daraus lässt sich z. B. ableiten, daß asymptotische Geodätische einen konvexen flachen Streifen aufspannen. Eine Parallelenschar von Geodätischen trägt damit eine natürliche Produktstruktur.

[Bal95] I.5, [BBI99] 9, [BH99] II.2

8 Der Satz von Cartan-Hadamard

Ursprünglich wurde der hier vorgestellte Satz zunächst für Flächen (Hadamard, 1898) und dann für Riemannsche Mannigfaltigkeiten (Cartan, 1928) bewiesen. Er stellt ein glänzendes Beispiel des sogenannten *local-to-global* Prinzips dar: Aus einer lokal definierten Größe, nämlich der Krümmung, bzw. in diesem Falle einer Krümmungsschranke, lassen sich Rückschlüsse auf die globale Gestalt und die Topologie eines Raumes schließen.

[Bal95] I.4, [BBI99] 9, [BH99] II.4

9 M_κ-Polyederkomplexe mit nichtpositiver Krümmung

Mit der Link-Bedingung und einem Satz über Flaggenkomplexe von Gromov lassen sich Krümmungsschranken für eine große Klasse von Polyederkomplexen durch ihre Kombinatorik charakterisieren.

[BH99] II.5

10 Isometrien nichtpositiv gekrümmter Räume

Zunächst sollen hier Isometrien von CAT(0)-Räumen, insbesondere die geometrischen Eigenschaften halbeinfacher Isometrien diskutiert werden.

Clifford Translationen und der euklidische deRham Faktor haben ihre Ursprünge in der Theorie nichtpositiv gekrümmter Riemannscher Mannigfaltigkeiten. Ihre Analoga für metrische Räume zeigen Beziehungen auf zwischen der Struktur einer operierenden Gruppe und der Geometrie des Raumes, auf welchem sie wirkt.

[Bal95] II.3, [BH99] I.8, II.2 & II.6

11 Satz vom flachen Torus

Der Satz vom flachen Torus beschreibt sehr anschaulich die Beziehung zwischen abelschen Untergruppen der Isometriegruppe und flachen Teilräumen eines CAT(0)-Raumes. Daraus ergeben sich interessante algebraische Konsequenzen für auflösbare oder virtuell polyzyklische Gruppen, welche isometrisch auf einem CAT(0)-Raum wirken.

[BH99] II.7

12 Ein Spaltungssatz

Dieser Vortrag behandelt eine Verallgemeinerung eines Satzes über Riemannsche Mannigfaltigkeiten von nichtpositiver Krümmung: Unter geeigneten Voraussetzungen induziert die Produktstruktur einer Gruppe von Isometrien eine Produktstruktur des Raumes auf welchem sie wirkt.

[BH99] II.6

Literatur

[Bär10] CHRISTIAN BÄR, *Elementare Differentialgeometrie*, Walter de Gruyter (2010).

[Bal95] WERNER BALLMANN, *Lectures on Spaces of Nonpositive Curvature*, DMV Seminar, Band 25, Birkhäuser (1995).

[BBI99] DMITRI BURAGO, YURI BURAGO und SERGEI IVANOV, *A course in metric geometry*, American Mathematical Society, (2001).

[BH99] MARTIN R. BRIDSON und ANDRÉ HAEFLIGER, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 319, Springer (1999).

[Bri91] MARTIN R. BRIDSON, *Geodesics and curvature in metric simplicial complexes*, Group Theory from a Geometrical Viewpoint (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky, ed), Proc. lCTP Trieste 1990, World Scientific, Singapore, (1991), S. 373 – 464.

[Jos97] JÜRGEN JOST, *Nonpositive Curvature : Geometric and Analytic Aspects*, Lectures in Mathematics: ETH Zürich, Birkhäuser (1997).