Karlsruher Institut für Technologie

Seminar

Kombinatorik von Coxetergruppen

JProf. Dr. Petra Schwer, M.Sc. Julia Heller

Coxetergruppen können auf einfache Weise über Präsentierungen mittels Erzeugern und Relationen definiert werden. Man kann Sie auch als (abstrakte) Spiegelungsgruppen auffassen. Zentrales Beispiel ist die S_n, die man sowohl als Permutationsgruppe, als auch als Symmetrien eines $(n-1)$-dimensionalen Simplex, oder als Weylgruppe des Wurzelsystems vom Typ A_{n-1} sehen kann.

In diesem Seminar beschäftigen wir uns hauptsächlich mit den kombinatorischen Eigenschaften von Coxetergruppen.

Nach einer kurzen Einführung in die allgemeine Theorie der Coxetergruppen und ihrer geometrischen Darstellungen als Spiegelungsgruppen legen wir den Fokus auf kombinatorische Methoden.

Wir lernen Ordnungsrelationen auf Coxetergruppen kennen, studieren assoziierte Graphen und berechnen Längenfunktionen. Ein Vortrag behandelt effiziente Methoden zu entscheiden, ob zwei Wörter das gleiche Gruppenelement präsentieren. Außerdem studieren wir Darstellungstheorie nach Kazhdan-Lusztig, die im engen Zusammenhang mit der Kombinatorik sogenannter Tableaux stehen.

Wir gehen dabei grundsätzlich nach dem Buch ***Combinatorics of Coxeter Groups*** von **Björner und Brenti** vor und verwenden an geeigneten Stellen weitere ergänzende Literatur.

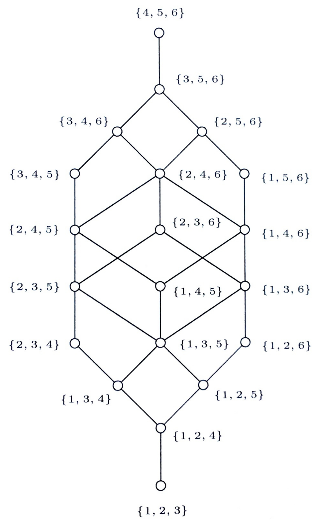


Diagramm der Bruhat Ordnung von $S_6^{(3)}$

Vorbesprechung: Mittwoch 20.07.2016 um 13:15 Uhr im Raum 2.058.

Wenn Sie am Seminar teilnehmen möchten, aber nicht zur Vorbesprechung kommen können, schreiben Sie uns bitte vorher eine Mail: petra.schwer@kit.edu oder julia.heller@kit.edu.

Bemerkungen:

Das Seminar findet voraussichtlich als Blockveranstaltung am Semesterende statt.
Geplanter Termin: 15.-17. Februar 2017

Die Vorlesungen EAZ, EGT, sowie Kenntnisse über Gruppenpräsentationen und -wirkungen (z.B. aus GGT) werden vorausgesetzt.
Das Seminar eignet sich für Masterstudenten, fortgeschrittene Bachelor- und Lehramtsstudenten. Im Anschluss an das Seminar können bei erfolgreicher Teilnahme Abschlussarbeitsthemen vergeben werden.

Beschreibungen der Vortragsthemen finden Sie auf unseren Webseiten, sowie am Aushang neben den Büros.

Karlsruher Institut für Technologie

Seminar

Kombinatorik von Coxetergruppen

JProf. Dr. Petra Schwer, M.Sc. Julia Heller

Vortragsthemen

(1) Präsentierung von Coxetergruppen Dieser Vortrag wiederholt das Konzept einer Gruppenpräsentierung und definiert Coxetergruppen, -graphen und -systeme. Auch werden erste Beispiele von Coxetergruppen vorgestellt: Symmetrische Gruppen, Diedergruppen, ...
Literatur: [BB] Section 1.1 und Beispiele aus 1.2; evtl. 1.3 [Mi]

(2) Geometrische Darstellung von Coxetergruppen Erklärt wird die standard geometrische Darstellung einer Coxetergruppe als Spiegelungsgruppe auf $\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^2$. Grundlegende Begriffe werden eingeführt: Spiegelungen, Hyperebenen, Wurzeln, etc.
Literatur: [BB] 4.1, 4.2; [Hum] Section 5.3

(3) Partiell geordnete Mengen und Simplizialkomplexe Es werden partiell geordnete Mengen eingeführt und erklärt, wie man daraus Simplizialkomplexe bauen kann. Dann sehen wir, wie man aus Coxetergruppen einen Coxeterkomplex erhält. (Wirkung der Coxetergruppe auf dem Komplex, parabolische Untergruppen, Wurzeln, ...)
Literatur: [BB] Appendix A.2, [Br] III

(4) Reduzierte Wörter und die Austauschbedingung Wir untersuchen kombinatorische Eigenschaften von Wörtern, die Elemente aus Coxetergruppen präsentieren. Stichworte sind: Längen von Wörtern, Austauschbedingung, Löschbedingung und weitere äquivalente Bedingungen.
Literatur: [BB] 1.4, 1.5; [Br] II 1 und 3

(5) Bruhat Ordnung und Bruhat Graphen Wir lernen die Bruhat-Ordnung kennen. Im endlichen Fall zeigen wir die Existenz eines längsten Wortes. Weiter werden Bruhat Graphen eingeführt und Beispiele diskutiert (z.B. der Diedergruppen, Symmetrische Gruppe).
Literatur: [BB] 2.1, 2.2; [Hum], Bsp. 1 Section 5.9

(6) Spiegelungslängen Wir betrachten Wortlängen von Elementen in Coxetergruppen bezüglich Spiegelungslänge, d.h. deren Länge bezüglich einer größeren (in manchen Fällen unendlichen) Erzeugermenge.
Literatur: [Dy]

(7) Tableaux Eine zentrale Rolle im Zusammenhang mit Coxetergruppen spielen Permutationen, die können mittels Kombinatorik sogenannter Tableaux untersucht werden können. Dieser Vortrag führt Tableaux ein und zeigt einige ihrer Eigenschaften, wie z.B. die Robinson-Schenstedt correspondence.
Literatur: [BB] A.3 (ohne 3.10) und ggf. Referenzen darin.

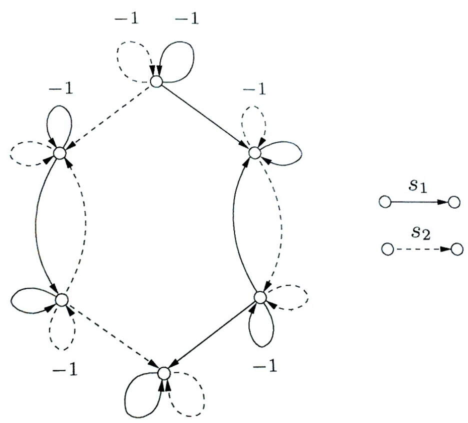
(8) Schwache Ordnung und Partitionen Es wird eine weitere Ordnungsrelation eingeführt und deren Zusammenhang mit nicht-kreuzenden Partitionen der Zahlen 1,.., n dargestellt.
Literatur: [BB] 3.1, 3.2, [Bra] 3

(9) Das Wortproblem Das Wortproblem in einer Gruppe besteht darin zu entscheiden, ob zwei Wörter aus Erzeugern dasselbe Gruppenelement beschreiben. Wir lernen einen einfachen Algorithmus kennen und sehen, warum Normalformen und das Zahlenspiel effizientere Lösungsmethoden liefern.
Literatur: [BB] 3.3, 3.4, 4.3

(10) Hecke Algebren Dieser Vortrag liefert algebraisches Hintergrundwissen für die Vorträge 11 und 12. Es werden Hecke Algebren und die Gruppenalgebra einer Coxetergruppe eingeführt und einige Eigenschaften vorgestellt.
Literatur: [BB] 6.1; [Hum] Chapter 7

(11) Kazhdan-Lusztig Graphen und Darstellungen Die "left cell" Darstellungen von Coxetergruppen, eingeführt von Kazhdan und Lusztig, können mittels beschrifteter Graphen untersucht werden. Dieser Vortrag führt die entsprechenden Graphen und Darstellungen ein und vergleicht diese mit den regulären Darstellungen.
Literatur: [BB] 6.2, 6.3

(12) Kazhdan-Lusztig Darstellungen - Spezialfall S_n Wir betrachten den Spezialfall $W = S_n$ und werden sehen, dass die Konstruktion von Kazhdan-Lusztig in diesem Fall die irreduziblen Darstellungen liefert. Dazu benötigt man Tableaux und sogenannte Knuth Relationen.
Literatur: [BB] 6.4, 6.5



kantengefärbter Kazhdan-Lusztig Graph der S_3

Literatur:
[BB] Björner und Brenti: Combinatorics of Coxeter groups, Springer 2005
[Bra] Brady: A Partial Order on the Symmetric Group and New $K(\pi, 1)$'s for the Braid Groups, `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870801919863`
[Br] Brown: Buildings, Springer, 1989
[Dy] Dyer: On minimal lengths of expressions of Coxeter group elements as products of reflections, Proceesings of the AMS, 2001
[Mi] Milne, Group Theory, `http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/gt.html`, 2013
[Hum] J. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge studies in adv. math. 29, Cambridge University Press, 1990.