Karlsruher Institut für Technologie

Seminar

Spiegelungsgruppen

JProf. Dr. Petra Schwer

Spiegelungsgruppen sind Untergruppen der Orthogonalen Gruppe eines euklidischen Vektorraumes, die von Spiegelungen an Hyperebenen erzeugt werden. Mit Hilfe dieser Gruppen und ihren Wirkungen auf geometrischen Objekten können Symmetrien untersucht werden. Sie dominieren auch die Geometrie der platonischen Körper, die wir im Seminar ebenfalls behandeln und klassifizieren werden. Die Strukturtheorie von Spiegelungsgruppen ist ein klassisches und mit elementaren Methoden zugängliches Thema und verbindet auf elegante Weise geometrische mit algebraischen Methoden.

In diesem Seminar beschäftigen wir uns meistens mit endlichen Spiegelungsgruppen. Hauptziel ist dabei ihre Klassifikation: das heißt wir werden eine vollständige Liste aller solcher Gruppen angeben. Zusätzlich lernen wir unendliche Spiegelungsgruppen und damit zusammenhängende Pflasterungen der Ebene kennen.

Wir gehen dabei grundsätzlich nach den Büchern *Mirrors and Reflections* von A.V. Borovik und A. Borovik, sowie *Reflection groups and Coxeter groups* von J. Humphreys vor und verwenden an geeigneten Stellen weitere ergänzende Literatur.

Die **Vorbesprechung** findet am **Donnerstag den 11.2.2016** um 13:15 statt. Der Ort wird noch auf der Webseite der Veranstaltung bekanntgegeben.

Vortragsthemen

(1) Gruppenwirkungen Wiederholung der grundlegende Begriffe der Gruppentheorie (die in den folgenden Vorträgen ohne Kommentar benutzt werden können); Gruppe, Untergruppen, Homomorphismus, Stabilisator, Bahnengleichung, Permutationsgruppen.
Literatur: [Art] 5.5-5.7 oder [Bo] 1.1, 1.2, 5.1

(2) Platonische Körper Bereits in der Antike kannte man die Platonischen Körper. Wir werden sehen, dass es (höchstens) 5 solche regulären Körper gibt.
Literatur: [Au] IV.4, IV.5; ergänzend [Co] Kapitel 10

(3) Die Gruppe $O((R)^3)$ und ihre endlichen Untergruppen Betrachten sie den Fall $O((R)^2)$ nur kurz und erläutern Sie dann die im Titel genannte orthogonale Gruppe und ihre Untergruppen.
Literatur: [GB] Kap. 2; ergänzend [Arm] Kap. 8

(4) Hyperebenenarrangements und polyedrische Kegel Wir betrachten Konfigurationen von Hyperebenen im affinen Raum und ihre (kombinatorischen) Eigenschaften. Kammern, Galerien, Polyeder, Kegel.
Literatur: [BB] Kap. 3 und 4; ergänzend [Bou] Kap. V §1

(5) Spiegelungen Wir betrachten spezielle Untergruppen von $O(\mathbb{R}^n)$, die von Spiegelungen erzeugt werden. Spiegelungen in Hyperebenen, Spiegelungssysteme, Dihedergruppe.
Literatur: [BB] Kap. 5-7, [H] 1.1

(6) Wurzelsysteme Wir lernen Wurzelsysteme und ein paar ihrer Eigenschaften kennen. Normalenvektoren zu Spiegelungen, (positive und einfache) Wurzelsysteme, W wird von einfachen Spiegelungen erzeugt.
Literatur: [BB] Kap 8, [H] 1.2-1.5; ergänzend [GB] 4.1

(7) Beispiele für Wurzelsysteme Wir diskutieren die Existenz eines Systems einfacher Wurzeln und lernen Beispiele für solche kennen.
Literatur: [BB] Kap 9; ergänzend [H] 1.2-1.5

(8) Coxeterkomplexe I Zu den endlichen Spiegelungsgruppen konstruieren wir einen simplizialen Komplex, den Coxeterkomplex. Wir sehen einen alternativen Beweis, dass W durch einfache Spiegelungen erzeugt wird. Galerien, Pfade, Faltungen, Wirkung von W auf dem Komplex.
Literatur: [BB] Kap 10, 11

(9) Coxeterkomplexe II Wir studieren Eigenschaften der Coxeterkomplexe. Gegenüberliegende Kammern, Isotropiegruppen, parabolische Untergruppen, Residuen.
Literatur: [BB] Kap 12,13 (13.5 ggf weglassen)

(10) Spiegelungsgruppen sind Coxetergruppen Darstellung einer Spiegelungsgruppe mit Erzeugern und Relationen, Einführung Coxetergruppen, Beweis der Aussage im Titel.
Literatur: [BB] Kap 15, [GB] Kap 6; ergänzend [H] 1.6-1.9

(11) Coxetergraphen Einer Spiegelungsgruppe kann man einen Graphen, den sogenannten Coxetergraphen, zuordnen. Mit Hilfe dieser Graphen lassen sich die Spiegelungsgruppen klassifizieren.
Literatur: [BB] Kap 16, [GB] Kap 5.1; ergänzend [H] 2.1-2.4, 2.7

(12) Konstruktion von Wurzelsystemen krystallographische Wurzelsysteme, explizite Konstruktion von Beispielen. Bitte Sprechen Sie sich mit dem Vortragendem aus Vortrag (7) ab.
Literatur: Eine Auswahl aus [BB] Kap 17, [H] 2.8, 2.10-2.12; ergänzend [GB] 5.3

(13) Parkettmustergruppen In diesem Vortrag betrachten wir unendliche Spiegelungsgruppen. Diese Kristallographischen Gruppen werden auch Parkettmustergruppen (englisch: wallpaper groups) genannt. Definition der betrachteten Gruppen, Beispiele, Translationsuntergruppe des Gitters, Klassifikation (ohne Beweis) anhand von Beispielen.
Literatur: [Arm] Kap. 24-26; ergänzend [Co] Kap. 4

Literatur:

[Arm] M. Armstrong: *Groups and symmetry*, Springer UTM, 1988.
[Art] M. Artin, *Algebra*, Birkhäuser, 1993.
[Au] M. Audin, *Geometry*, Springer Universitext, 2002.
[BB] A.V. Borovik und A. Borovik, *Mirrors and Reflections*, Springer Universitext, 2010.
[Bo] S. Bosch, *Algebra*, Springer.
[Bou] N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras, Chapter 4-6*, Springer, 2002.
[Co] H. Coxeter, *Introduction to geometry*, Wiley, 1969.
[GB] L. Grove und C. Benson, *Finite reflection groups*, 2nd edition, Springer GTM, 1985.
[H] J. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge studies in adv. math. 29, Cambridge University Press, 1990.