Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Leonid Grau

Karlsruher Institut für Technologie

Symmetrische Räume **Wintersemester 2019/20**

Übungsblatt 1 **16. Oktober 2019**

Aufgabe 1 *(Hyperkugeln)*
Die n-dimensionale Einheitskugel ist definiert als

$$K_n := \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 \} \subset \mathbb{R}^n.$$

Berechnen Sie das Volumen $\mathrm{Vol}(K_n)$ von K_n und zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Vol}(K_n) = 0$.

Aufgabe 2 *(Punktspiegelungen)*
Die Punktspiegelung σ_P an einem Punkt P der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$ (bzw. der Sphäre $\mathbb{S}^2$) weist jedem Punkt $z \in \mathbb{H}^2$ (bzw. $\mathbb{S}^2$) einen Punkt $\sigma_P(z) \in \mathbb{H}^2$ (bzw. $\mathbb{S}^2$) zu, sodass z, P und $\sigma_P(z)$ auf einer Geodätischen liegen und P die Strecke von z nach $\sigma_P(z)$ halbiert.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $P \in \mathbb{H}^2$ die Punktspiegelung σ_P eine Isometrie ist.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $P \in \mathbb{S}^2$ die Punktspiegelung σ_P eine Isometrie ist.

Aufgabe 3 *(Iwasawa-Zerlegung)*
Gegeben seien folgende beiden Untergruppen von $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$:

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_i > 0 \text{ für alle } i \text{ und } \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = 1 \right\} \quad \text{und} \quad N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Zeigen Sie: Jedes Element $g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ hat eine eindeutige Darstellung $g = kan$ als Produkt von Elementen $k \in \mathrm{SO}(n)$, $a \in A$ und $n \in N$. Diese Zerlegung heißt *Iwasawa-Zerlegung*.

b) Berechnen Sie die Iwasawa-Zerlegung von $g = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4 *(Wohldefiniertheit)*

a) Zeigen Sie, dass der Raum der unimodularen Gitter wohldefiniert ist, d. h.

$$\left(\mathrm{SO}(n) \setminus \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})\right) \big/ \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{SO}(n) \big\backslash \left(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})\right)$$

b) Seien r und $\widehat{r}$ wie in der Vorlesung. Zeigen Sie, dass

$$\max_{\substack{L \text{ unimodulares} \\ \text{Gitter in } \mathbb{R}^n}} r(L) = \max_{[g] \in \widetilde{\mathcal{G}_n}} \widehat{r}([g])$$

gilt.