Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Leonid Grau

Symmetrische Räume **Wintersemester 2019/20**

Übungsblatt 2 **23. Oktober 2019**

Aufgabe 1 *(Der Torus)*

a) Zeigen Sie, dass es für den Rotationstorus

$$T_R := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a + r\cos t \\ 0 \\ r\sin t \end{pmatrix} \;\middle|\; \varphi \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

mit $0 < r < a$ einen differenzierbaren Atlas $\mathcal{A}_R$ gibt.

b) Zeigen Sie, dass es für den flachen Torus $T_F := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ einen differenzierbaren Atlas $\mathcal{A}_F$ gibt.

c) Finden Sie einen Diffeomorphismus zwischen $(T_R, \mathcal{A}_R)$ und $(T_F, \mathcal{A}_F)$.

Aufgabe 2 *(Tangentialraum und Differential)*

a) Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sowie $(x_1, \ldots, x_n)$ wie in der Vorlesung lokale Koordinaten um einen Punkt $p \in M$. Zeigen Sie, dass

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_p \right\}$$

eine Basis von T_pM ist.

b) Es sei $F\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Weiterhin sei $c\colon I \to M$ eine Kurve in M mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v \in T_pM$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\mathrm{d}F_p(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F \circ c)\bigg|_{t=0}.$$

Aufgabe 3 *(Lie-Klammer)*

Zeigen Sie für $X, Y \in \mathcal{V}M$ und $[X,Y] := XY - YX$ folgende Aussagen:

a) $[Y,X] = -[X,Y]$ (Schiefsymmetrisch)

b) $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$ ($\mathbb{R}$-bilinear)

c) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ (Jacobi-Identität)