Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Leonid Grau

Symmetrische Räume **Wintersemester 2019/20**

Übungsblatt 3 **30. Oktober 2019**

Aufgabe 1 *(Christoffel-Symbole)*

Es sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang D. In lokalen Koordinaten gilt

$$D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Berechnen Sie die Γ_{ij}^k aus den $g_{ij} := \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$.

Aufgabe 2 *(Starrheit von Isometrien)*

Es sei M eine zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: Sind Φ und Ψ Isometrien von M mit $\Phi(p) = \Psi(p)$ und $\mathrm{d}\Phi_p = \mathrm{d}\Psi_p$ für *ein* $p \in M$, so ist $\Phi = \Psi$.

Aufgabe 3 *(Grassmann-Mannigfaltigkeit)*

Für $0 \leq k \leq n$ bildet die Menge aller k-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$ die Grassmann-Mannigfaltigkeit $G(k, n)$. Definieren Sie Karten für $G(k, n)$ und bestimmen Sie die Dimension.

Aufgabe 4 *(Erzeuger von Lie-Gruppen)*

a) Es sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe und $U \subset G$ eine offene Umgebung von e. Zeigen Sie, dass G von U erzeugt wird (das heißt, G ist die kleinste Untergruppe in G, die U enthält).

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SO}(n)$ zusammenhängend ist, aber $\mathrm{O}(n)$ nicht.