Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Leonid Grau

Karlsruher Institut für Technologie

Symmetrische Räume **Wintersemester 2019/20**

Übungsblatt 4 **06. November 2019**

Aufgabe 1 *(Linksinvariante Vektorfelder)*
Es sei G eine Lie-Gruppe und $X \in \mathcal{V}G$. Dann heißt X *linksinvariant*, falls

$$X(gh) = \mathrm{d}L_{g|_h} X(h) \qquad \forall g, h \in G$$

Zeigen Sie:

Sind X, Y linksinvariante Vektorfelder auf G, so ist auch die Lie-Klammer $[X, Y]$ ein linksinvariantes Vektorfeld auf G.

Aufgabe 2 *(Lie-Algebra)*
Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Vektorprodukt

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

eine Lie-Algebra ist, die zur Lie-Algebra von $\mathrm{SO}(3)$ isomorph ist.

Aufgabe 3 *(Matrix-Exponentialfunktion)*
Zeigen Sie, dass für $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ gilt: $\det(\mathrm{e}^A) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}$

Aufgabe 4 *(Lie-Exponentialabbildung)*
Zeigen Sie am Beispiel $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, dass die Exponentialabbildung $\mathfrak{g} \to G$ im Allgemeinen weder injektiv noch surjektiv ist.