Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Leonid Grau

Symmetrische Räume **Wintersemester 2019/20**

Übungsblatt 5 **13. November 2019**

Aufgabe 1 *(Campbell-Baker-Hausdorff-Formel)*

Es sei G eine n-dimensionale Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathfrak{g}$. Zeigen Sie für $X, Y \in D := \{ X \in \mathfrak{g} \mid \|X\| \leq 1 \}$:

a) $\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX) = \exp(tY + t^2[X,Y] + O(t^3))$

b) $\exp(-\sqrt{t}X)\exp(-\sqrt{t}Y)\exp(\sqrt{t}X)\exp(\sqrt{t}Y) = \exp(t[X,Y] + O(t^{3/2}))$

Aufgabe 2 *(Heisenberggruppe)*

Die *Heisenberggruppe* H^3 ist die folgende 3-dimensionale Lie-Untergruppe von $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$:

$$H^3 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Zeigen Sie, dass die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{h}^3$ durch

$$\mathfrak{h}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u & w \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; u, v, w \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben ist.

b) Bestimmen Sie für $A, B \in \mathfrak{h}^3$ und genügend kleines $t \in \mathbb{R}$ ein $C(t) \in \mathfrak{h}^3$ mit

$$e^{tA}e^{tB} = e^{C(t)}.$$

Aufgabe 3 *(Lokale Isomorphismen)*

Zeigen Sie, dass die Lie-Gruppen $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(2,1)$ und $\mathrm{SU}(1,1)$ lokal isomorph sind.

Aufgabe 4 *(Killing-Form)*

Für die Lie-Gruppen $G = \mathrm{SO}(n)$ bzw. $G = \mathrm{SU}(n)$ mit zugehörigen Lie-Algebren $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ bzw. $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$ definiert man die *Killing-Form*

$$B\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}, \quad (X,Y) \mapsto \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(XY)).$$

Zeigen Sie:

a) B ist eine negativ-definite Bilinearform auf $\mathfrak{g}$.

b) B ist $\mathrm{Ad}(G)$-invariant, d.h. für alle $g \in G$ und alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt

$$B(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y) = B(X,Y).$$