Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Leonid Grau

Symmetrische Räume **Wintersemester 2019/20**

Übungsblatt 6 **20. November 2019**

Aufgabe 1 *(Heisenberggruppe II)*

Identifizieren Sie die Heisenberggruppe H^3 als Mannigfaltigkeit mit $\mathbb{R}^3$, d.h. betrachten Sie den Diffeomorphismus

$$\varphi\colon H^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Dann ist $d\varphi|_E\colon T_E H^3 \cong \mathfrak{h}^3 \longrightarrow T_0\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ ein Vektorraum-Isomorphismus.

a) Zeigen Sie: Via obigem Isomorphismus sind $A, B, C \in \mathfrak{h}^3$ mit

$$A := \frac{\partial}{\partial x}, \quad B := \frac{\partial}{\partial y} + x \cdot \frac{\partial}{\partial z}, \quad C := \frac{\partial}{\partial z}$$

linksinvariante Vektorfelder auf H^3.

b) Berechnen Sie die Lie-Klammern $[A, B]$, $[A, C]$ und $[B, C]$.

Aufgabe 2 *(Eine nicht-lineare Lie-Gruppe)*

Die Gruppe $Z := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z} \right\}$ ist eine normale Untergruppe von H^3.

Zeigen Sie, dass die Faktorgruppe H^3/Z keine Matrix-Lie-Gruppe ist, das heißt topologisch nicht isomorph zu einer linearen Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ für ein n.

Hinweis: Benutzen Sie (ohne Beweis) die folgende Aussage:

Lemma: Sei G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ und p eine Primzahl. Gibt es $S, T \in G$, sodass $R := S^{-1}T^{-1}ST$ von Ordnung p ist, und ist $SR = RS$ und $TR = RT$, dann gilt $n \geq p$.

Aufgabe 3 *(Hyperboloid Modell des hyperbolischen Raums)*

Es sei q die durch

$$q(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}$$

gegebene Bilinearform auf $\mathbb{R}^{n+1}$, sowie $\bar{q}$ die zugehörige quadratische Form $\bar{q}(x) := q(x, x)$. Weiter sei $\mathbb{L}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \bar{q}(x) = -1 \text{ und } x_{n+1} > 0\}$ die obere Schale des Hyperboloids $\{\bar{q} = -1\}$. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle u, v \rangle_p := q(u, v) \quad p \in \mathbb{L}^n,\ u, v \in T_p\mathbb{L}^n$$

eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{L}^n$ gegeben ist.