Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Leonid Grau

Symmetrische Räume **Wintersemester 2019/20**

Übungsblatt 7 **27. November 2019**

Aufgabe 1 *(Isolierter Fixpunkt)*

Es sei S ein symmetrischer Raum und $p \in S$.
Zeigen Sie, dass der Punkt p ein isolierter Fixpunkt der geodätischen Spiegelung s_p ist. (Das heißt, es gibt eine Umgebung von p, in der kein weiterer Fixpunkt von s_p liegt.)

Aufgabe 2 *(Isometriegruppe der Sphäre)*

Zeigen Sie, dass die Isometriegruppe der n-Sphäre isomorph zur orthogonalen Gruppe $O(n+1)$ ist.

Hinweis:
Betrachten Sie dazu das Rahmenbündel $OS^n := \{ (p, B) \mid p \in S^n, B \text{ ONB von } T_pS^n \}$ und identifizieren es mit der Menge der ONBs von $\mathbb{R}^{n+1}$.

Aufgabe 3 *(Zusammenhängende Gruppen)*

Es sei G eine topologische Gruppe und G^0 die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements. Weiter $H \leq G$ eine Untergruppe von G. Zeigen Sie:

a) G^0 ist eine normale Untergruppe von G.

b) Sind H und G/H zusammenhängend, dann ist auch G zusammenhängend.

c) Die Gruppe $\mathrm{SO}(2)$ ist zusammenhängend. Folgern Sie daraus mit Hilfe von Teil (b), dass $\mathrm{SO}(n)$ auch für jedes $n \geq 2$ zusammenhängend ist.