Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Leonid Grau

Symmetrische Räume **Wintersemester 2019/20**

Übungsblatt 8 **04. Dezember 2019**

Aufgabe 1 *(Ergänzung zu Lemma 2 in Abschnitt 5.3 der Vorlesung)*

Es sei G eine Lie-Transformationsgruppe, die auf einer Mannigfaltigkeit M transitiv operiert.
Es sei $p \in M$ und $G_p \subseteq G$ die Isotropiegruppe von p.
Zeigen Sie, dass die Abbildung $\alpha\colon G/G_p \to M,\ gG_p \mapsto g \cdot p$ differenzierbar ist.

Hinweis:
Sei $\pi\colon G \to G/G_p$ die natürliche Projektion. Wie im Beweis von Satz 1, Kapitel 4 sei $D_\varepsilon \subset G$ so, dass $\pi|_{D_\varepsilon}$ ein Diffeomorphismus ist. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
D_\varepsilon \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"] & G \arrow[d, "\beta"] \\
\pi(D_\varepsilon) \arrow[r, "\alpha"] & M
\end{tikzcd}$$

(mit $\beta(g) = g \cdot p$) und $\alpha|_{\pi(D_\varepsilon)}$ ist differenzierbar.

Aufgabe 2 *(Ein homogener Raum)*

Auf $\mathbb{R}^n$ sei die folgende symmetrische Bilinearform gegeben:

$$Q(x,y) := -x_1y_1 - \ldots - x_py_p + x_{p+1}y_{p+1} + \ldots + x_ny_n$$

Die zu Q gehörende spezielle indefinite orthogonale Gruppe ist:

$$\mathrm{SO}(p, n-p) := \{\, A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \mid Q(Ax, Ay) = Q(x,y) \quad \forall x, y \,\}$$

Dann ist die (nicht-kompakte) Grassmann-Mannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}^*_{p,n-p}(\mathbb{R}^n)$ definiert als

$$\mathrm{Gr}^*_{p,n-p}(\mathbb{R}^n) := \{\, U \mid U\ p\text{-dim. UVR},\ Q|_U \text{ negativ definit} \,\}.$$

Zeigen Sie, dass die (nicht-kompakte) Grassmann-Mannigfaltigkeit als der homogene Raum

$$\mathrm{Gr}^*_{p,n-p}(\mathbb{R}^n) \cong \mathrm{SO}(p, n-p) \,/\, \mathrm{S}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(n-p))$$

beschrieben werden kann und bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Gr}^*_{p,n-p}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 3 *(Ein symmetrischer Raum)*
Es sei H eine zusammenhängende kompakte Lie-Gruppe.
Weiter seien

$$G := H \times H \quad \text{und} \quad K := \{ (h,h) \in G \mid h \in H \}$$

sowie

$$\sigma\colon G \to G\ ,\ (h_1, h_2) \mapsto (h_2, h_1).$$

a) Zeigen Sie, dass G/K ein symmetrischer Raum diffeomorph zu H ist.

b) Bestimmen Sie die geodätische Spiegelung an $x_0 = eK$.

c) Bestimmen Sie die Cartan-Involution $\Theta := \mathrm{d}\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ und die Geodätischen durch x_0.