Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Leonid Grau

Symmetrische Räume **Wintersemester 2019/20**

Übungsblatt 10 **18. Dezember 2019**

Aufgabe 1 *(Killing-Form der speziellen linearen Gruppe)*
Zeigen Sie: Die Killing-Form von $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ ist gegeben durch $B(X,Y) = 2n\mathrm{Spur}(XY)$ für alle $X, Y \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$.

Aufgabe 2 *(Duale symmetrische Räume)*
Zwei symmetrische Räume $S = G/K$ und $S^* = G^*/K^*$, deren Riemannsche Metriken jeweils durch die Killing-Formen B bzw. B^* induziert sind, heißen *dual*, falls gilt

(1) es existiert ein Lie-Algebra-Isomorphismus $\widetilde{\delta}\colon \mathfrak{k} \longrightarrow \mathfrak{k}^*$, sodass

$$B^*(\widetilde{\delta}V, \widetilde{\delta}W) = B(V,W) \qquad \text{für alle } V, W \in \mathfrak{k},$$

(2) es existiert eine lineare Isometrie $\delta\colon \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^*$, sodass

$$[\delta X, \delta Y] = -\widetilde{\delta}[X,Y] \qquad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{p}.$$

a) Sei S ein symmetrischer Raum von nicht-kompaltem Typ und S^* ein dualer symmetrischer Raum von kompaktem Typ. Zeigen Sie, dass S und S^* entgegengesetzte Schnittkrümmung haben, d. h.

$$K(\delta(\Pi)) = -K(\Pi) \qquad \text{für jede Ebene } \Pi \subset T_{x_0}S \cong \mathfrak{p}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Grassmann-Mannigfaltigkeiten

$$\mathrm{O}(p+q)/(\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(q)) \quad \text{und} \quad \mathrm{O}(p,q)/(\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(q))$$

duale symmetrische Räume sind.