

Aufgabe 1 (*Komplex-projektiver Raum*)

Der durch das symmetrische Paar $(U(n+1), U(1) \times U(n))$ mit der Involution

$$\sigma: U(n+1) \rightarrow U(n+1), A \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}^{-1}$$

definierte symmetrische Raum CP^n heißt *komplex-projektiver Raum*.

- Bestimmen Sie die Cartan-Zerlegung und die Killing-Form.
- Zeigen Sie, dass CP^n ein symmetrischer Raum von kompaktem Typ ist und bestimmen Sie eine $U(n+1)$ -invariante Riemannsche Metrik.

Aufgabe 2 (*Schnittkrümmung*)

Berechnen Sie die Schnittkrümmung für die folgenden symmetrischen Räume.

- $S^n = SO(n+1)/SO(n)$
- $CP^n = U(n+1)/(U(1) \times U(n))$

Aufgabe 3 (*Heisenberggruppe III*)

Zeigen Sie, dass die Heisenberggruppe H^3 (siehe Übungsblatt 5) nicht halbeinfach ist.