Dichteste Kugelpackungen in $\mathbb{R}^n$, einige Resultate

- dichteste Kugelpackungen existieren (δ_n und d_n)

- δ_n ist *nicht* bekannt für $n \geq 4$
- obere Schranken:
  Rogers (1958): $\delta_n \leq \sigma_n \sim 2^{-0.5n}$
  Kabatiansky-Levenshtein (1978): $\delta_n \leq 2^{-0.599n}$ für $n \geq 43$
- d_n ist *nicht* bekannt für $n \geq 9$ und $n \neq 24$
- Cohn-Kumar (2009):
  $d_{24} = d(\text{Leech-Gitter}) = \pi^{12}/12! \sim 0.0019$ (Rogers: 0.0025)
  Vermutung: $\delta_{24} = d_{24}$
- Minkowski/Hlawka (1905/1944):
  Für genügend grosse n existiert $L \subset R^n$ mit $d(L) \geq 2^{-n} 2\zeta(n)$

$n=1$	$\delta_1 = d_1 = 1$
$n=2$	$\delta_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0.9068 = d(H)$ $H =$ hexagonales Gitter Thue (1882), Fejes (1940)
$n=3$	Kepler-Vermutung (1611): $\delta_3 \stackrel{?}{=} d(\text{f.c.c. Gitter})$ Gauß(1831): $d_3 = d(\text{f.c.c. Gitter})$ Hales (1998): $\delta_3 = d(\text{f.c.c. Gitter})$
$n=4,5$	d_4, d_5 bekannt: Korkine-Zolotareff (1877)
$n=6,7,8$	d_6, d_7, d_8 bekannt: Blichfeldt (1935)
$n=24$	$d_{24} = d(\text{Leech-Gitter})$: Cohn-Kumar (2009) Vermutung: $\delta_{24} = d_{24}$
$n \leq 1000$	viele Rekorde: Elkies-Shioda (1989)