

Galoissche Mumford-Origamis

Diplomarbeit

von

Karsten Kremer

betreut von

Prof. Dr. Frank Herrlich

Mathematisches Institut II
Universität Karlsruhe (TH)

4. Juli 2005

Vorwort

In dieser Diplomarbeit werden wir *galoissche Mumford-Origamis* untersuchen¹. Im ersten Kapitel wird erklärt, was *galoissche Origamis* sind. Dazu werden einige grundlegende Begriffe aus der Topologie und der algebraischen Geometrie möglichst allgemeinverständlich eingeführt. Für einzelne Aussagen werden dabei Grundkenntnisse aus der linearen Algebra benötigt.

Zu jedem Körper k gibt es die Gruppe $\mathrm{PGL}_2(k)$. Ihre Elemente lassen sich durch 2×2 -Matrizen beschreiben. Im zweiten Kapitel werden wir uns mit dieser Gruppe und ihren Untergruppen beschäftigen. Hierfür sollte der Leser ein wenig mit Gruppen und Gruppenoperationen vertraut sein. Alles wichtige hierüber kann man notfalls in [2], Kap. 1 und 5.1 nachlesen.

Ein nichtarchimedischer Betrag ist ein Betrag mit allerlei seltsamen Eigenschaften, die wir in Kapitel 3 genauer untersuchen werden. Wir werden dort auch definieren, was eine *Mumford-Kurve* ist. Ein Mumford-Origami ist dann ein Origami von Mumford-Kurven. Als Hilfsmittel zur Untersuchung von Mumford-Kurven werden wir jeder Mumford-Kurve einen Graphen zuordnen. Hierfür werden einige Definitionen aus der Graphentheorie als bekannt vorausgesetzt.

Das vierte Kapitel enthält schließlich den Teil dieser Arbeit, der in der Literatur bisher nicht zu finden ist: die Bestimmung aller galoisschen Mumford-Origamis für die meisten möglichen Grundkörper k .

Für alle, die etwas mehr Vorkenntnisse aus der algebraischen Geometrie mitbringen, werde ich nun den Inhalt dieser Arbeit kurz zusammenfassen und darlegen, warum man sich für galoissche Mumford-Origamis interessieren kann.

Zusammenfassung

Verkleben wir von einem Einheitsquadrat die linke mit der rechten und die obere mit der unteren Seite, so erhalten wir einen Torus, beziehungsweise eine elliptische Kurve über \mathbb{C} .

Nun verkleben wir von endlich vielen Einheitsquadraten jeweils eine linke mit einer rechten Seite und eine obere mit einer unteren. Eine so entstandene kompakte Riemannsche Fläche nennen wir *Origami*². Jedes Origami ist eine nicht-singuläre projektive algebraische Kurve über \mathbb{C} . Ein Origami kann man auf natürliche Weise als Überlagerung einer elliptischen Kurve auffassen: Wir bilden dazu jeden Punkt in einem Quadrat des Origamis auf den entsprechenden Punkt im einzigen Quadrat des Torus-Origamis ab. Diese Überlagerung verzweigt nur in den Eckpunkten der Quadrate, hat also genau einen kritischen Wert: den (einzigen) Eckpunkt des Torus-Quadrats.

Wenn wir nun statt Quadraten beliebige Parallelogramme zulassen, erhalten wir eine Schar von komplexen Kurven von gleichem Geschlecht g , die alle zur gleichen Verklebe-Vorschrift passen. Diese bilden eine Kurve im Modulraum \mathfrak{M}_g der nichtsingulären projektiven algebraischen Kurven vom Geschlecht g (siehe [11], Prop. 3.2 iii)).

¹Wie der Titel bereits vermuten ließ.

²Dieser Begriff wurde in [11], Def. 3.1 eingeführt. Dort findet man auch noch mehr über den algebraisch geometrischen Hintergrund.

Nun definieren wir allgemeiner ein Origami als endliche Überlagerung einer elliptischen Kurve mit genau einem kritischen Wert³. Diese Definition funktioniert über beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körpern. Die Überlagerung heißt *galoissch*, wenn die Deckgruppe transitiv auf den Fasern operiert.

Wir interessieren uns speziell für den Fall, dass k ein nichtarchimedisch bewerteter algebraisch abgeschlossener Körper (zum Beispiel der Körper der p -adischen Zahlen \mathbb{C}_p). Eine *Mumford-Kurve* über k ist das Analogon zu einer Riemannschen Fläche über \mathbb{C} : eine nichtsinguläre projektive Kurve, die lokal isomorph zu $\mathbb{P}^1(k)$ ist⁴. Man erhält solche Kurven, indem man eine Schottky-Gruppe $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(k)$ auf ihrem Diskontinuitätsbereich $\Omega \subset \mathbb{P}^1(k)$ operieren lässt und dann den Quotienten Ω/Γ bildet.

Leider sind nicht alle nichtsingulären projektiven Kurven Mumford-Kurven. Wir suchen daher diejenigen galoisschen Origamis, die zu Mumford-Kurven gehören. Das Hauptergebnis dieser Arbeit (Satz 4.17) wird aussagen, welche Mumford-Origamis es geben kann, falls die Charakteristik p des Restklassenkörpers von k größer als 5 ist. Danach werden wir einige dieser Origamis explizit konstruieren.

Die Frage, welche galoisschen Mumford-Origamis es für $p \leq 5$ gibt, ist noch ungeklärt. Auch wäre es interessant, Mumford-Origamis zu finden, die nicht galoissch sind. Man könnte auch Mumford-Origamis suchen, die als algebraische Kurve schon über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert sind. Diese sind natürlich auch über \mathbb{C} definiert und lassen sich dort durch Verkleben von Quadraten beschreiben.

Danksagungen

An erster Stelle möchte ich mich bei Prof. Frank Herrlich für die ausdauernde Betreuung dieser Arbeit bedanken, besonders während des Endspurts. Für das Lesen und Korrigieren der Arbeit, sowie für fruchtbare Diskussionen danke ich ebenfalls der Origami-Fachfrau Gabriela Schmithüsen, dem Mann fürs p -adische Dr. Erik Bradley und Horst Hammer, dessen Sinn für Orthographie, Stil und Ästhetik ich nicht immer (aber doch meistens) geteilt habe. Natürlich gilt mein Dank genauso allen Mitgliedern der Kaffeegruppe am Lehrstuhl Schmidt, die mir bei der Literaturrecherche und bei dummen Fragen weitergeholfen haben.

Schließlich bedanke ich mich bei meinen Eltern (nicht nur für die Finanzierung dieser Arbeit) und bei J. K. Rowling für die Motivation, meinen Zeitplan einzuhalten.

Unabhängigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Karlsruhe, den 4. Juli 2005

Karsten Kremer

³Diese Definition findet man auch in [12], Def. 2.2.

⁴Diese Charakterisierung findet man in [6], Chap. V, Theorem 5.1. Dort wird auch präzisiert, in welchem Sinn hier „lokal“ gemeint ist.

Inhaltsverzeichnis

1	Galoissche Origamis	5
1.1	Ein erstes Origami	5
1.2	Das Geschlecht einer Fläche	6
1.3	Algebraische Kurven	7
1.4	Überlagerungen	10
2	Die Gruppe der Möbius-Transformationen	13
2.1	Möbius-Transformationen	13
2.2	Endliche Untergruppen	15
2.3	Diskontinuierliche Untergruppen	18
3	Mumford-Kurven	21
3.1	Nichtarchimedische Bewertungen	21
3.2	Das System der Kreisscheiben	25
3.3	Mumford-Kurven	29
3.4	Der Baum einer Gruppe	32
3.5	Quotientengraphen	37
3.6	Abstände	38
3.7	Achsen	40
4	Galoissche Mumford-Origamis	46
4.1	Zwei Beispiele	46
4.2	Klappbares	50
4.3	Tertium datur	52

Kapitel 1

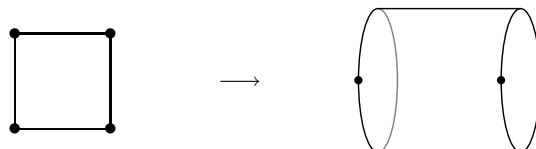
Galoissche Origamis

Im ersten Kapitel werden wir einige grundlegende Begriffe einführen: Ein *Origami* ist eine speziell konstruierte kompakte Riemannsche Fläche. Wenn man sich mit Flächen beschäftigt, sollte man wissen, wie deren *Geschlecht* definiert ist. Dies werden wir von Stillwell [13] übernehmen.

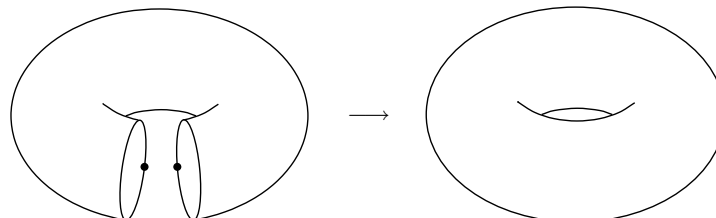
Wir werden dann ein Origami allgemeiner als Überlagerung von *algebraischen Kurven* definieren. Die dafür notwendigen Definitionen aus der algebraischen Geometrie übernehmen wir von Hartshorne [7]. Außerdem benötigen wir Überlagerungen, deren Eigenschaften wir ähnlich wie bei Forster [5] definieren.

1.1 Ein erstes Origami

Gegeben sei ein Einheitsquadrat. Verkleben wir die obere mit der unteren Seite, so erhalten wir einen Zylinder.



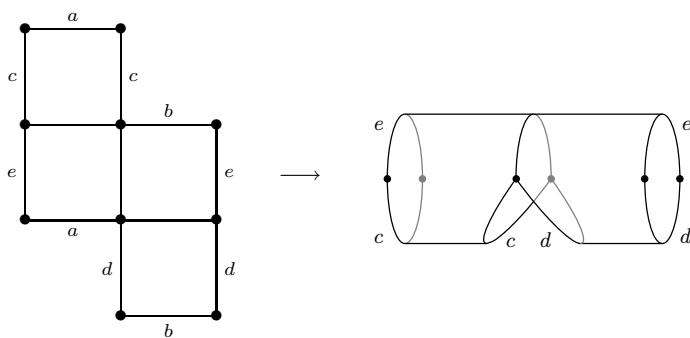
Wenn wir nun auch noch die linke mit der rechten Seite verkleben, erhalten wir (nachdem wir uns den Zylinder etwas zurechtgebogen haben) einen Torus T .



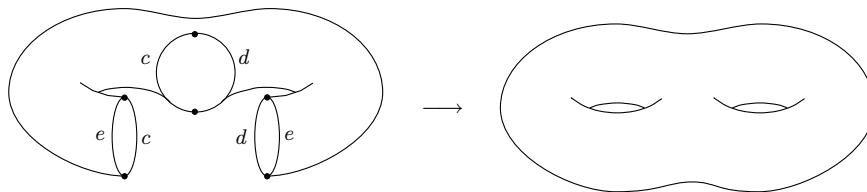
Nun verallgemeinern wir dieses Verfahren: Wir verkleben endlich viele Einheitsquadrate so, dass jede untere Seite mit einer oberen Seite und jede rechte Seite

mit einer linken Seite verklebt wird. Wir erhalten eine kompakte Fläche O ohne Rand. Eine solche Fläche nennen wir *Origami*.

Beispiel 1.1 Wir verkleben zunächst die Kanten a und b der folgenden vier Quadrate. Dabei passen wir gut auf, dass wir nicht aus Versehen die Kanten c und d miteinander verkleben.



Nun biegen wir erst wieder ein wenig, und verkleben dann die übrigen Kanten:



Wir stellen fest, dass das fertig verklebte Origami nur zwei verschiedene Eckpunkte hat.

1.2 Das Geschlecht einer Fläche

Definition 1.2 Sei F eine zusammenhängende orientierbare Fläche.

Ein *Schnittsystem* von F ist eine Menge $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ von disjunkten geschlossenen Wegen in F , so dass die Schnittfläche

$$F \setminus \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$$

immer noch zusammenhängend ist. Die Zahl

$$g(F) := \max \{ |S| : S \text{ Schnittsystem von } F \}$$

heißt das *Geschlecht* von F .

Beispiel 1.3 Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn wir aus einer Kugeloberfläche $2n$ Kreisscheiben ausschneiden, erhalten wir eine Kugel mit $2n$ Löchern. Wenn wir nun die Ränder von je zwei dieser Löcher miteinander verkleben, erhalten wir eine Kugel mit n „Henkeln“. Diese Fläche hat dann Geschlecht n , da man die verklebten Kreise wieder aufschneiden kann, ohne dass die Fläche in mehrere Teile zerfällt.

Die Beschreibung eines Origamis durch das Verkleben von Quadraten liefert eine Aufteilung der Fläche O in endlich viele Teilflächen, die homöomorph zu Quadraten sind. Für eine solche Fläche kann man das Geschlecht leicht mit Hilfe der Euler-Charakteristik ermitteln:

Definition 1.4 Sei F eine Fläche, die aus endlich vielen Polygonen durch Verkleben von Kanten hervorgeht. Die *Euler-Charakteristik* von F ist definiert als

$$\chi(F) := e - k + f$$

Dabei sei f die Anzahl der Polygone, k die Anzahl der Kanten und e die Anzahl der Ecken (jeweils *nach* dem Verkleben).

Für eine Fläche F gilt $\chi(F) = 2 - 2g(F)$ nach [13], § 1.3.8. Damit ist insbesondere gezeigt, dass $\chi(F)$ wohldefiniert ist.

Für ein Origami O wissen wir bereits, dass alle Flächen Quadrate sind, also jeweils vier Kanten haben. Da jede Kante zu genau zwei Flächen gehört, erhalten wir $k = 2f$, also $\chi(O) = e - f$. Das Geschlecht eines Origamis erhalten wir damit als

$$g(O) = 1 + \frac{f - e}{2}$$

Beispiel 1.5 Wir haben bereits gesehen, dass der Torus T durch Verkleben eines einzigen Quadrats entsteht, wobei alle Eckpunkte in T zusammenfallen. Damit ist $e = f = 1$ und wir erhalten $g(T) = 1$. Dieses Ergebnis erhalten wir auch direkt über die Definition des Geschlechts: Schneiden wir den Torus entlang einer beliebigen geschlossenen Kurve auf, so erhalten wir einen Zylinder (wie in Abschnitt 1 gesehen). Aus diesem können wir keine weitere Kurve ausschneiden, ohne dass er in zwei Teile zerfällt.

Beispiel 1.6 Das Origami O aus Beispiel 1.1 besteht aus vier Quadraten und zwei Ecken, also gilt $g(O) = 2$.

1.3 Algebraische Kurven

Bisher haben wir ein Origami O durch das Verkleben von Einheitsquadraten der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 definiert. Mit der Identifizierung $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ haben wir damit automatisch eine komplexe Struktur auf O , das heißt wir können ein kleines Gebiet in O mit einem kleinen Gebiet in \mathbb{C} identifizieren. Man nennt eine solche Fläche auch *Riemannsche Fläche*¹.

Solche Flächen sind zweidimensional über \mathbb{R} , damit jedoch eindimensional über \mathbb{C} . Daher werden sie in der algebraischen Geometrie als (komplexe) *Kurven* bezeichnet. Diese Kurven sind nicht nur über \mathbb{C} interessant, sondern auch über beliebigen anderen Körpern. Wir wollen daher definieren, was im allgemeinen eine *algebraische Kurve* sein soll. Dazu sei k in diesem Abschnitt grundsätzlich algebraisch abgeschlossen².

¹für eine präzise Definition von Riemannschen Flächen siehe [5], Kap. I, Def. 1.4

²Ein Körper k ist *algebraisch abgeschlossen*, wenn jedes Polynom $f \in k[X]$ eine Nullstelle in k hat.

Definition 1.7 Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $F \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ heißt

$$V(F) := \{x \in k^n : f(x) = 0 \text{ für alle } f \in F\}$$

die Nullstellenmenge der Polynome in F . Eine solche Menge heißt *algebraische Menge* oder *affine Varietät*³.

Eine Varietät V heißt *irreduzibel*, falls es keine echten Untervarietäten V_1 und V_2 von V gibt, so dass $V = V_1 \cup V_2$ ist.

Die *Dimension* $\dim(V)$ einer Varietät V ist die größte Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die es eine Kette

$$V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \dots \subsetneq V_n \subseteq V$$

von irreduziblen Varietäten V_0, \dots, V_n gibt.

Eine eindimensionale Varietät heißt *algebraische Kurve*.

Ein irreduzible Varietät $V = V(\{f_1, \dots, f_m\})$ heißt *nichtsingulär* in einem Punkt $P = (x_1, \dots, x_n)$, wenn die Jacobi-Matrix

$$\left((\partial f_i / \partial x_j)(P) \right)_{ij}$$

den Rang $n - \dim(V)$ hat (das heißt nichts anderes, als dass es in P einen Tangentialraum an V der Dimension $\dim(V)$ geben soll).

Eine Varietät heißt *nichtsingulär*, wenn sie in jedem Punkt nichtsingulär ist.

Beispiel 1.8 Sei $k = \mathbb{R}$ und $n = 2$.

\mathbb{R} ist zwar nicht algebraisch abgeschlossen, also eigentlich nicht erlaubt; dies soll uns hier jedoch nicht weiter stören. Man kann sich \mathbb{R}^2 einfach wesentlich besser vorstellen als \mathbb{C}^2 .

- Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $V(\{X - x, Y - y\}) = \{(x, y)\}$. Also ist jeder Punkt im \mathbb{R}^2 eine Varietät.
- Das Achsenkreuz $V(XY)$ ist eine Varietät der Dimension 1. Es ist nicht irreduzibel, da man es als Vereinigung der beiden Achsen $V(X) \cup V(Y)$ schreiben kann.
- Der Einheitskreis $K = V(X^2 + Y^2 - 1)$ ist eine Varietät. Die einzigen echten Untervarietäten sind die Punkte auf dem Kreis. Damit ist die Kreislinie eine algebraische Kurve. Im Punkt $(x, y) \in K$ ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X}(X^2 + Y^2 - 1)(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial Y}(X^2 + Y^2 - 1)(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist genau dann die Nullmatrix, wenn $x = y = 0$ ist. Das ist für $(x, y) \in K$ nicht möglich. Also ist der Rang der Matrix 1. Da auch $n - \dim(K) = 2 - 1 = 1$ ist, ist K damit nichtsingulär.

³Eigentlich gehört zu einer Varietät V auch noch eine spezielle Topologie auf V : die *Zariski-Topologie*, bei der die abgeschlossenen Mengen gerade die Untervarietäten von V sind.

Definition 1.9 Für $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ sei

$$(x_0 : \dots : x_n) := \{(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) : \lambda \in k\}$$

die Ursprungsgerade durch den Vektor (x_0, \dots, x_n) in k^{n+1} . Die x_i heißen *homogene Koordinaten* der Geraden.

Die Menge aller Ursprungsgeraden in k^{n+1}

$$\mathbb{P}^n(k) := \{(x_0 : \dots : x_n) : (x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}\}$$

nennen wir den n -dimensionalen *projektiven Raum* über k .

Wir wollen nun Varietäten in $\mathbb{P}^n(k)$ definieren. Es gibt dabei jedoch ein Problem: Die homogenen Koordinaten (x_0, \dots, x_n) und $(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$ beschreiben für $\lambda \in k$ den gleichen Punkt in $\mathbb{P}^n(k)$. Gilt allerdings $f(x_0, \dots, x_n) = 0$ für ein Polynom $f \in k[X_0, \dots, X_n]$, so folgt daraus im allgemeinen nicht automatisch $f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = 0$. Damit ist $V(f)$ in $\mathbb{P}^n(k)$ nicht wohldefiniert. Wir wollen also nur Polynome f zulassen, für die dieses Problem nicht auftritt:

Definition 1.10 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \in k[x_0, \dots, x_n]$. Das Polynom f heißt *homogen* vom Grad d , wenn

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)$$

gilt. Diese Forderung ist äquivalent dazu, dass alle Monome von f vom Grad d sind.

Eine *projektive Varietät* ist eine Menge der Form

$$V(F) := \{x \in \mathbb{P}^n(k) : f(x) = 0 \text{ für alle } f \in F\}$$

wobei $F \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ eine Menge von homogenen Polynomen ist (dann ist $V(F)$ wohldefiniert).

Beispiel 1.11 Sei $k = \mathbb{R}$. Die Menge $V = V(X^2 + Y^2 - Z^2)$ ist eine projektive Varietät. Eingeschränkt auf $\{(x : y : 1) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})\} \cong \mathbb{R}^2$ ist dies gerade die Einheitskreislinie K aus Beispiel 1.8 b). Der Punkt $(x : y : 0) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ist genau dann in V enthalten, wenn $x^2 + y^2 = 0$, also $x = y = 0$ ist. Dies ist in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ nicht möglich. Damit ist V isomorph zu K .

Wenn wir jedoch $k = \mathbb{C}$ wählen, dann hat die Gleichung $x^2 = -y^2$ die nicht-trivialen Lösungen $x = \pm iy$. Damit hat V zwei Punkte mehr als K (wenn man auch für K den Grundkörper \mathbb{C} wählt): $V = K \cup \{(i : 1 : 0), (-i : 1 : 0)\}$.

Es gibt einen fundamentalen Zusammenhang zwischen algebraischen Kurven und Riemannschen Flächen:

Satz 1.12 Über $k = \mathbb{C}$ gilt:

- a) Jede nichtsinguläre projektive Kurve ist eine Riemannsche Fläche.
- b) Jede Riemannsche Fläche ist eine nichtsinguläre projektive Kurve.

Beweis:

- a) Da die Kurve nichtsingulär ist, gibt es zu jedem Punkt x eine partielle Ableitung nach einer Koordinate, die nicht verschwindet. Damit ist nach dem Satz über implizit definierte Funktionen eine Umgebung von x isomorph zu einer Umgebung in \mathbb{C} . Die so definierten Kartenabbildungen passen zusammen (das heißt: die Kartenwechselabbildungen sind holomorph).
- b) Der Beweis ist schwierig, man findet eine Skizze in [7], App. B, Theorem 3.1. \square

Für eine nichtsinguläre projektive algebraische Kurve V kann man auch allgemein deren *Geschlecht* definieren⁴. Über \mathbb{C} ist diese Definition äquivalent zum Geschlecht von V als Riemannsche Fläche wie in Definition 1.2 (folgt direkt aus [7], App. B, Theorem 2.1).

Im folgenden Abschnitt wollen wir nun den Begriff „Origami“ allgemeiner für nichtsinguläre projektive Kurven über beliebigen Körpern definieren.

1.4 Überlagerungen

Wir können jeden Punkt in einem Origami auf den entsprechenden Punkt im Einheitsquadrat abbilden. Nach Verkleben der Kanten erhalten wir so eine natürliche Abbildung $p : O \rightarrow T$ auf den Torus. Diese Abbildung hat eine Menge schöner Eigenschaften:

Definition 1.13 Sei f eine Abbildung zwischen topologischen Räumen.

f heißt *stetig*, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

f heißt *offen*, wenn das Bild jeder offenen Menge offen ist.

f heißt *diskret*, wenn das Urbild jedes Punktes diskret⁵ ist.

f heißt *Überlagerung*, wenn f stetig, offen und diskret ist.

Definition 1.14 Sei $p : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung.

Ein Punkt $x \in X$ heißt *Verzweigungspunkt* von p , falls es keine Umgebung U von x gibt, so dass $p|_U$ injektiv ist. Der Punkt $p(x) \in Y$ heißt dann *kritischer Wert* von p .

Sei $m \in \mathbb{N}$. Die Überlagerung p heißt *endlich vom Grad m* , falls $|p^{-1}(\{y\})| = m$ für alle $y \in Y$ gilt, die keine kritischen Werte sind.

Ist x Verzweigungspunkt einer endlichen Überlagerung p , so gibt es in jeder Umgebung U von x zwei Punkte mit dem gleichen Bild, also gilt:

$$m(U) := \max_{x' \in U} |p^{-1}(\{p(x')\}) \cap U| > 1$$

Wir definieren damit:

$$e_x := \min \{m(U) : U \text{ Umgebung von } x\}$$

heißt *Verzweigungsordnung* von p in x .

⁴Es gibt sogar noch allgemeiner für beliebige Varietäten zwei verschiedene Geschlechter (das *arithmetische* und das *geometrische*), welche allerdings für nichtsinguläre projektive Kurven äquivalent sind (siehe dazu [7], Chap. III, Rem. 7.12.2)

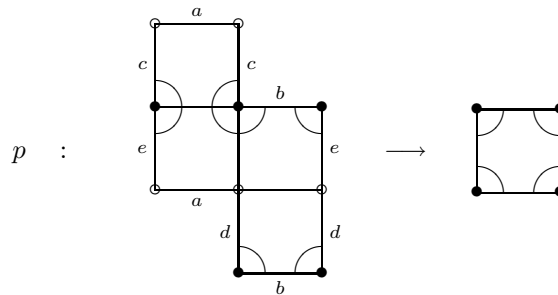
⁵Eine Menge heißt *diskret*, wenn sie keinen Häufungspunkt enthält.

Beispiel 1.15 Sei $p_k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die durch $p_k(z) := (z-1)^k$ definierte Abbildung. Diese Abbildung ist auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ lokal umkehrbar. Der einzige Verzweigungspunkt von p_k ist also 1, der einzige kritische Wert ist $p_k(1) = 0$. Jeder Punkt in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ hat k Urbilder, der Grad der Überlagerung ist somit k und entspricht der Verzweigungsordnung in 1.

Beispiel 1.16 Sei p die oben beschriebene Überlagerung $O \rightarrow T$ von einem Origami O auf den Torus T . In allen Punkten außer den Eckpunkten der Quadrate ist diese Abbildung lokal umkehrbar. Als Verzweigungspunkte kommen also nur diese Eckpunkte in Frage. Jeder Eckpunkt von O wird auf den (nach dem Verkleben einzigen) Eckpunkt von T abgebildet. Dies ist somit der einzige kritische Wert von p .

In unserem Origami aus Beispiel 1.1 hat jeder Punkt aus dem Einheitsquadrat (außer dem Eckpunkt) vier Urbilder in O . Damit ist p eine Überlagerung vom Grad 4.

Wir wählen nun eine (hinreichend kleine) Umgebung V des Eckpunkts \bullet in T . Deren Urbild in O zerfällt in zwei disjunkte Umgebungen U_\circ von \circ und U_\bullet von \bullet (in der Abbildung ist U_\bullet eingezeichnet). Schränken wir p auf eine dieser Umgebungen ein, so hat jeder Bildpunkt genau zwei Urbildpunkte. Damit sind die Verzweigungsordnungen der beiden Eckpunkte \bullet und \circ jeweils 2.



Wir werden in Kapitel 3 einen anderen Betrag auf \mathbb{Q} definieren und damit einen Körper \mathbb{C}_p konstruieren, der sich wesentlich von \mathbb{C} unterscheidet. Auch hier können wir Flächen betrachten, die lokal aussehen wie Gebiete in \mathbb{C}_p , diese Flächen nennen wir *Mumford-Kurven*. Alle Mumford-Kurven sind nichtsinguläre projektive Kurven über \mathbb{C}_p .

In \mathbb{C}_p gibt es leider kein sinnvolles Analogon zum Einheitsquadrat. Es gibt aber Kreise in \mathbb{C}_p . Damit können wir wie in Beispiel 1.3 Mumford-Kurven von beliebigem Geschlecht konstruieren. Wir wollen auch hier Origamis untersuchen. Daher verallgemeinern wir nun unsere anschauliche Beschreibung eines Origamis:

Definition 1.17 Seien X und Y nichtsinguläre projektive Kurven über einem Körper k . Ein *Origami* ist eine endliche Überlagerung $X \rightarrow Y$ mit $g(Y) = 1$ und genau einem kritischen Wert.

Im komplexen Fall erhalten wir auch mit dieser Definition die Beschreibung eines Origamis durch Verkleben von Quadraten. Wir müssen dazu nur den Torus mit einem Quadrat überdecken, dessen Eckpunkt gerade im kritischen Wert der

Überlagerung liegt. Dann liefert das Urbild dieses Quadrats eine Unterteilung des Origamis in endlich viele Quadrate.

Bemerkung 1.18 Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Origami. Dann hat f nur endlich viele Verzweigungspunkte x_1, \dots, x_n , und für die zugehörigen Verzweigungsordnungen e_1, \dots, e_n gilt:

$$\sum_{i=1}^n (e_i - 1) = 2g(X) - 2$$

Beweis: Sei m der Grad der Überlagerung f . Da f genau einen kritischen Wert hat, gibt es maximal m Verzweigungspunkte von f . Es gilt der Satz von Riemann-Hurwitz ([7], Chap. IV, Cor. 2.4):

$$2g(X) - 2 = m \cdot (2g(Y) - 2) + \sum_{i=1}^n (e_i - 1)$$

Mit $g(Y) = 1$ folgt die Behauptung. \square

Nun da wir wissen, was ein Origami ist, können wir auch definieren, was ein *galoissches* Origami sein soll:

Definition 1.19 Sei $p : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung.

Eine stetige Abbildung $f \in \text{Aut}(X)$ heißt *Decktransformation*, falls f das Bild eines Punktes in Y nicht ändert, also falls $p(f(x)) = p(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Die Decktransformationen bilden mit der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die mit $\text{Deck}(X/Y)$ bezeichnet wird.

Die Überlagerung p heißt *galoissch*⁶, falls zu je zwei Punkten $x_1, x_2 \in X$ mit $p(x_1) = p(x_2)$ ein $f \in \text{Deck}(X/Y)$ mit $f(x_1) = x_2$ existiert.

Eine galoissche Überlagerung lässt sich auch folgendermaßen charakterisieren:

Bemerkung 1.20 Eine Überlagerung $p : X \rightarrow Y$ ist genau dann galoissch, wenn es eine Gruppe $G \subseteq \text{Aut}(X)$ gibt mit $Y \cong X/G$.⁷

Es ist dann $G \cong \text{Deck}(X/Y)$.

Beweis:

„ \Rightarrow “ Sei p galoissch, $x_1, x_2 \in X$. Dann gilt mit $G := \text{Deck}(X/Y)$

$$p(x_1) = p(x_2) \Leftrightarrow \exists g \in G : g(x_1) = x_2 \Leftrightarrow Gx_1 = Gx_2$$

„ \Leftarrow “ Sei $Y = X/G$, $x_1, x_2 \in X$. Es gilt dann

$$p(x_1) = p(x_2) \Leftrightarrow Gx_1 = Gx_2 \Leftrightarrow \exists g \in G : g(x_1) = x_2$$

Also gilt $p(g(x_1)) = p(x_1)$ für alle $g \in G$. Daraus folgt $G \subseteq \text{Deck}(X/Y)$

Diese so erhaltene Bijektion $Y \rightarrow X/\text{Deck}(X/Y)$ ist mit der topologischen Struktur auf X und Y verträglich, also $Y \cong X/\text{Deck}(X/Y)$. \square

⁶Den Zusammenhang zwischen galoisschen Überlagerungen und galoisschen Körpererweiterungen kann man in [5], Satz 8.12 nachlesen.

⁷Diese Aussage lässt sich auch auf komplexere Strukturen übertragen, insbesondere gilt die Aussage auch für Überlagerungen von algebraischen Kurven X und Y , wobei $\text{Aut}(X)$ dann die Automorphismen von X als algebraische Kurve bezeichnet.

Kapitel 2

Die Gruppe der Möbius-Transformationen

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass wir Flächen mit beliebigem Geschlecht konstruieren können, indem wir Kreise aus einer Kugel ausschneiden und die Ränder der Löcher dann zu Henkeln verkleben. Dieses Verfahren wollen wir nun statt über $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ auch über anderen Körpern k der Charakteristik 0 durchführen. Dazu benötigen wir zunächst eine „Kugel“ über k .

2.1 Möbius-Transformationen

Definition 2.1 $\mathbb{P}(k) := \mathbb{P}^1(k)$ heißt *projektive Gerade*¹ über k .

Durch $(a : b) \mapsto \frac{a}{b}$ ist eine Bijektion $\mathbb{P}(k) \setminus \{(1 : 0)\} \rightarrow k$ definiert. Definieren wir $\infty := (1 : 0)$, so erhalten wir

$$\mathbb{P}(k) = k \cup \{\infty\}$$

Betrachten wir $\mathbb{P}(k)$ im euklidischen Fall: Sei S^2 die Oberfläche der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 , und $N = (0, 0, 1) \in S^2$ deren „Nordpol“. Wir können nun durch jeden Punkt auf $S^2 \setminus \{N\}$ eine Gerade durch den Nordpol legen, und diese mit der „Äquatorebene“ $x_3 = 0$ schneiden. Dies ergibt eine bijektive Abbildung $S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

Diese Abbildung können wir auf den Nordpol fortsetzen, indem wir N auf den Punkt ∞ abbilden. Dadurch erhalten wir eine Bijektion $S^2 \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C})$. Daher nennt man $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ auch die *Riemannsche Zahlenkugel*.

Sei nun $f : k^2 \rightarrow k^2$ eine lineare Abbildung. Da $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $\lambda \in k$, $x \in k^2$ gilt, wird die Ursprungsgerade durch x auf die Ursprungsgerade durch $f(x)$ abgebildet. Damit definiert f eine Funktion $\mathbb{P}(k) \rightarrow \mathbb{P}(k)$, falls $f(x) \neq 0$ für alle $x \in k^2$ ist. Ein solches f lässt sich darstellen als

$$f : k^2 \rightarrow k^2; x \mapsto Ax$$

wobei $A \in \text{GL}_2(k)$ eine invertierbare 2×2 Matrix ist.

¹Wir erinnern uns daran, dass eine Gerade über \mathbb{C} eigentlich eine Fläche über \mathbb{R} ist.

Definition 2.2 Eine Abbildung $f : \mathbb{P}(k) \rightarrow \mathbb{P}(k)$ der Form

$$f((x : y)) = A(x : y) := (ax + by : cx + dy) \text{ mit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(k)$$

heißt *Möbiustransformation*. Sehen wir $\mathbb{P}(k)$ als $k \cup \{\infty\}$ an, so ergibt sich

$$f(z) = Az = \frac{az + b}{cz + d}$$

Dabei ist $f(z) = \infty$, falls der Nenner 0 ergibt und $f(\infty) = \frac{a}{c}$.

Für alle $z \in \mathbb{P}(k)$, $\lambda \in k$ gilt $Az = (\lambda A)z$. Alle Matrizen der Form λA beschreiben also die gleiche Möbiustransformation. Es macht daher Sinn, $GL_2(k)$ in Äquivalenzklassen einzuteilen:

Definition 2.3 Sei $A \in GL_2(k)$.

$$[A] := \{\lambda A : \lambda \in k \setminus \{0\}\}$$

ist die Menge aller Vielfachen von A . Nun definieren wir

$$\text{PGL}_2(k) := \{[A] : A \in GL_2(k)\}$$

Da die Möbiustransformation nicht von der Wahl eines Repräsentanten abhängt, können wir nun für $\alpha \in \text{PGL}_2(k)$ definieren:

$$\alpha z := Az \text{ für ein beliebiges } A \in \alpha$$

Nun sind für $\alpha \neq \beta \in \text{PGL}_2(k)$ die Möbiustransformationen $z \mapsto \alpha z$ und $z \mapsto \beta z$ immer verschieden. Wir können $\text{PGL}_2(k)$ also als *Gruppe der Möbiustransformationen* bezeichnen.

In dieser Arbeit werden Matrizen ausschließlich als Elemente von $\text{PGL}_2(k)$ vorkommen. Wir verzichten daher darauf, sie jedes Mal in eckige Klammern einzuschließen.

Ist λ Eigenwert von $A \in GL_2(k)$, so können wir die Jordan-Normalform von $\frac{1}{\lambda}A$ benutzen, um $[A]$ in eine der folgenden drei Klassen einzuteilen:

Definition 2.4 Sei $\alpha \in \text{PGL}_2(k)$ und K ein algebraischer Abschluss von k .

α heißt *elliptisch*, wenn α in K zu $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $|x| = 1$ konjugiert ist.

α heißt *hyperbolisch*, wenn α in K zu $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $|x| \neq 1$ konjugiert ist.

α heißt *parabolisch*, wenn α in K zu $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $x \neq 0$ konjugiert ist.

Bemerkung 2.5 Seien $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{P}(k)$ paarweise verschieden.

Dann gibt es ein $\gamma \in \text{PGL}_2(k)$ mit $\gamma(0) = x_1, \gamma(\infty) = x_2$ und $\gamma(1) = x_3$.

Mit dieser Bemerkung haben wir also drei Wünsche frei: Wenn wir im weiteren Aussagen über eine Untergruppe G von $\mathrm{PGL}_2(k)$ machen, so werden wir oft ohne Einschränkung drei beliebige Punkte nach 0 , 1 und ∞ verschieben und die Aussage für die zu G konjugierte Gruppe $\gamma^{-1}G\gamma$ beweisen.

Beweis: Falls $\infty \notin \{x_1, x_2, x_3\}$, so setze

$$\gamma := \begin{pmatrix} x_2(x_3 - x_1) & x_1(x_2 - x_3) \\ x_3 - x_1 & x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Für $x_i = \infty$ setze $\gamma := \gamma_i$ mit

$$\gamma_1 := \begin{pmatrix} x_2 & x_3 - x_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 := \begin{pmatrix} x_3 - x_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 := \begin{pmatrix} x_2 & -x_1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \square$$

2.2 Endliche Untergruppen

Wir werden nun alle endlichen Untergruppen von $\mathrm{PGL}_2(k)$ für einen algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik 0 bestimmen.

Lemma 2.6 Sei G eine nichttriviale endliche Untergruppe von $\mathrm{PGL}_2(k)$ und ∞ kein Fixpunkt eines Elements in G . Sei weiter $n = |G|$ und $x, y \in k$ mit $|Gx| = |Gy| = n$ und $G\infty \neq Gx \neq Gy \neq G\infty$ (dabei ist $Gx := \{gx : g \in G\}$ die Bahn von x). Dann ist die Funktion

$$f : z \mapsto \prod_{\alpha \in G} \frac{\alpha(z) - x}{\alpha(z) - y}$$

G -invariant und ihre Ableitung f' hat genau $2n - 2$ Nullstellen.

Beweis: Die G -Invarianz folgt direkt aus der Definition von f .

Behauptung 1: Zu $\alpha \in G$ gibt es Polynome g_α und h_α vom Grad 1 mit

$$f(z) = \prod_{\alpha \in G} \frac{g_\alpha(z)}{h_\alpha(z)}$$

Behauptung 2: Für ein solches f gilt

$$f'(z) = 0 \Leftrightarrow \sum_{\alpha \in G} \left((g'_\alpha(z)h_\alpha(z) - g_\alpha(z)h'_\alpha(z)) \prod_{\alpha \neq \beta \in G} h_\beta(z)g_\beta(z) \right) = 0$$

Behauptung 3: Sind alle g_α und h_α normiert, so gilt

$$\sum_{\alpha \in G} (h_\alpha(z) - g_\alpha(z)) \neq 0$$

Seien die g_α, h_α ohne Einschränkung normiert (dies ändert f nur um einen konstanten Faktor, was die Aussage des Lemmas nicht ändert). Für $\alpha \in G$ ist dann $g'_\alpha = h'_\alpha = 1$, die Leitkoeffizienten von h_α und g_α sind ebenfalls 1 und $h_\alpha - g_\alpha$ ist konstant. Aus Behauptung 3 folgt dann, dass der Leitkoeffizient des

Polynoms in Behauptung 2 nicht verschwindet, also dass dessen Grad genau $2n - 2$ ist. Damit hat f' genau $2n - 2$ Nullstellen.

Beweis von Behauptung 1: Für $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ ist

$$\frac{\alpha(z) - x}{\alpha(z) - y} = \frac{(az + b) - x(cz + d)}{(az + b) - y(cz + d)} = \frac{(a - cx)z + (b - dx)}{(a - cy)z + (b - dy)} =: \frac{g_\alpha(z)}{h_\alpha(z)}$$

Da x nicht in der Bahn von ∞ liegt, ist $x \neq \frac{a}{c} = \alpha(\infty)$. Also ist $\text{grad}(g_\alpha) = 1$. Das gleiche gilt auch für h_α .

Beweis von Behauptung 2: Mit Quotienten- und Produktregel ergibt sich

$$f' = \frac{\sum_{\alpha \in G} \left(g'_\alpha h_\alpha \prod_{\beta \neq \alpha \in G} h_\beta g_\beta \right) - \sum_{\alpha \in G} \left(g_\alpha h'_\alpha \prod_{\beta \neq \alpha \in G} h_\beta g_\beta \right)}{\prod_{\alpha \in G} h_\alpha^2}$$

Zusammenfassen des Zählers liefert die Behauptung.

Beweis von Behauptung 3: Hier verwenden wir, dass ∞ kein Fixpunkt von G ist. Dies bedeutet, dass $f(\frac{1}{z})'$ an der Stelle 0 nicht verschwindet.² Für $\alpha \in G$ sei $g_\alpha(z) = z + a$ und $h_\alpha(z) = z + b$. Dann gibt es lineare Polynome \tilde{g}_α und \tilde{h}_α mit

$$\frac{g_\alpha(\frac{1}{z})}{h_\alpha(\frac{1}{z})} = \frac{1 + az}{1 + bz} =: \frac{\tilde{g}_\alpha(z)}{\tilde{h}_\alpha(z)}$$

Insbesondere gilt $\tilde{g}_\alpha(0) = \tilde{h}_\alpha(0) = 1$. Es folgt nun mit Behauptung 2

$$f(\frac{1}{z})'(0) = \sum_{\alpha \in G} \left(\tilde{g}'_\alpha(0) \tilde{h}_\alpha(0) - \tilde{g}_\alpha(0) \tilde{h}'_\alpha(0) \right) = a - b \neq 0$$

Damit haben wir $h_\alpha(z) - g_\alpha(z) = (z + b) - (z + a) \neq 0$. □

Satz 2.7 Sei G eine endliche Untergruppe von $\text{PGL}_2(k)$.

Dann ist G isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

- zur zyklischen Gruppe $Z_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{N}$
- zur Diedergruppe D_n für ein $n \in \mathbb{N}$
- zur Symmetriegruppe des Tetraeders $T := A_4$
- zur Symmetriegruppe des Oktaeders (und des Würfels) $O := S_4$
- zur Symmetriegruppe des Ikosaeders (und des Dodekaeders) $I := A_5$

Beweis: Den Beweis dieses Satzes für $k = \mathbb{C}$ findet man in [4], §57. Wir werden ihn hier mit Hilfe von Lemma 2.6 auf beliebige algebraisch abgeschlossene Körper von Charakteristik 0 verallgemeinern.

²Mit $f(1/z)'$ meinen wir die Ableitung der Funktion $f_* : z \mapsto f(1/z)$. Falls der Funktionswert von f an der Stelle ∞ nicht mehrfach angenommen wird, so gilt dies auch für den Funktionswert von f_* an der Stelle 0.

Ohne Einschränkung sei ∞ kein Fixpunkt eines Elements in G . Sei $n = |G|$ und f die in Lemma 2.6 definierte G -invariante rationale Funktion.

Wird ein Punkt z von ν Elementen aus G fixiert, so gilt dies auch für alle anderen Elemente aus derselben Bahn. Der Funktionswert $f(z)$ wird an solch einem Punkt ν -fach angenommen. Also hat die Ableitung f' dort eine $(\nu - 1)$ -fache Nullstelle. Der *Stabilisator* $G_z = \{g \in G : gz = z\}$ hat ν Elemente. Dann ist ν Teiler von $|G| = n$, da G_z Untergruppe von G ist. Die Bahn Gz hat damit n/ν Elemente (nach [2], Bem. 5.1.5).

Sei s die Anzahl der Bahnen von Fixpunkten von G . Die $2n - 2$ Nullstellen von f' sind diese Fixpunkte. Für $i \in \{1, \dots, s\}$ ist jeder Fixpunkt aus einer Bahn mit n/ν_i Fixpunkten der Ordnung ν_i jeweils eine $(\nu_i - 1)$ -fache Nullstelle. Wir erhalten daraus folgende Gleichung³ für die Vielfachheiten der Nullstellen:

$$\sum_{i=1}^s \frac{n}{\nu_i} (\nu_i - 1) = 2n - 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) = 2 - \frac{2}{n}$$

Die Zahlen $n \geq 2$ und $\nu_i \geq 2$ sind ganz, außerdem sind die ν_i Teiler von n . Man sieht damit schnell, dass $s > 1$ und $s < 4$ gelten muss.

Stimmen bei zwei endlichen Untergruppen von $\text{PGL}_2(k)$ die Werte ν_1, ν_2 und ν_3 überein, so sind die Gruppen isomorph (Diese Aussage glauben wir, oder lesen den Beweis in [4], §57 nach). Damit können wir nun alle möglichen endlichen Gruppen bestimmen:

Für $s = 2$ erhalten wir für beliebiges n die Lösung $\nu_1 = \nu_2 = n$. Dies sind gerade die zyklischen Gruppen Z_n .

Für $s = 3$ sei ohne Einschränkung $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$. Damit ergibt sich $\nu_1 = 2$ und $\nu_2 \in \{2, 3\}$. Für $\nu_2 = 2$ erhalten wir $\nu_3 = n/2$, somit ist (mit geradem n) dann G eine Diedergruppe $D_{n/2}$. Für $\nu_2 = 3$ bleiben die Möglichkeiten $\nu_3 \in \{3, 4, 5\}$. Dies ergibt die Polyedergruppen T, O und I . \square

Später werden uns insbesondere die Diedergruppen und die Tetraedergruppe interessieren. Daher ermitteln wir nun, wie diese als Untergruppen der $\text{PGL}_2(k)$ realisierbar sind.

Bemerkung 2.8 Sei $G = \langle \delta, \sigma \rangle \subset \text{PGL}_2(k)$ isomorph zur Diedergruppe D_n mit $\text{ord}(\delta) = n$ und $\text{ord}(\sigma) = 2$. Sei weiter ζ eine primitive n -te Einheitswurzel. Dann gilt ohne Einschränkung

$$\delta = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Elemente von G sind dann die Drehungen δ^i mit den Fixpunkten 0 und ∞ , sowie die Spiegelungen $\sigma\delta^i$ mit den Fixpunkten $\pm\zeta^{-i/2}$.

Beweis: Ohne Einschränkung seien 0 und ∞ die Fixpunkte von δ . Dann sind 0 und ∞ nicht beide Fixpunkte von σ , denn sonst wäre $\delta : z \mapsto az$ und $\sigma : z \mapsto bz$ für $a, b \in k$. Für $n > 2$ würde dies $\delta\sigma \neq \sigma\delta$ widersprechen, für $n = 2$ wäre dann $a = b = -1$, also $\delta = \sigma$.

³Dies ist übrigens nichts anderes als die Riemann-Hurwitz-Formel für die Überlagerung $\mathbb{P}(k) \rightarrow \mathbb{P}(k)/G$, vgl. Beweis von Bemerkung 1.18 mit $g(\mathbb{P}(k)) = g(\mathbb{P}(k)/G) = 0$.

Sei also ohne Einschränkung 1 ein Fixpunkt von σ . Wegen $\delta\sigma = \sigma\delta^{-1}$ sind $\sigma(0)$ und $\sigma(\infty)$ die Fixpunkte von δ , also 0 und ∞ . Da nicht sowohl 0 als auch ∞ Fixpunkte von σ sein können, gilt $\sigma(0) = \infty$ und $\sigma(\infty) = 0$. Dadurch ist σ eindeutig als $z \mapsto z^{-1}$ bestimmt, -1 ist also der andere Fixpunkt von σ .

Die übrigen Fixpunkte verifiziert man durch Hinschauen. \square

Bemerkung 2.9 Seien $\delta, \sigma \in A_4$ mit $\text{ord}(\delta) = 3, \text{ord}(\sigma) = 2$.

Dann ist $A_4 = \langle \delta, \sigma \rangle$. Die Drehungen sind $\delta, \sigma\delta, \delta\sigma, \sigma\delta\sigma$ und die Inversen davon. Die Spiegelungen sind $\sigma, \delta\sigma\delta^{-1}$ und $\delta^{-1}\sigma\delta$.

Beweis: Wir schreiben die Elemente von A_4 in der Zykelschreibweise. Ohne Einschränkung sei $\delta = (1\ 2\ 3)$ und $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$. Der Beweis der Behauptung folgt nun durch Ausrechnen der angegebenen Produkte. \square

Bemerkung 2.10 Sei $G = \langle \delta, \sigma \rangle \subset \text{PGL}_2(k)$ isomorph zur Tetraedergruppe $T = A_4$ mit $\text{ord}(\delta) = 3$ und $\text{ord}(\sigma) = 2$. Sei weiter ζ eine primitive dritte Einheitswurzel. Dann gilt ohne Einschränkung

$$\delta = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Fixpunkte der Drehungen sind 0 und ∞ , sowie ζ^i und $-\frac{1}{2}\zeta^i$ für $i \in \{0, 1, 2\}$. Die Fixpunkte der Spiegelungen sind $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{3} - 1)\zeta^i$, ebenfalls für $i \in \{0, 1, 2\}$.

Beweis: Ohne Einschränkung seien 0 und ∞ die Fixpunkte von δ und $\sigma(0) = 1$ (wie im Beweis von Bemerkung 2.8 können wir $\sigma(0) \neq 0$ annehmen, und bei $\sigma(0) = \infty$ wäre $\langle \delta, \sigma \rangle \cong D_3$). Wegen $\text{ord}(\sigma) = 2$ ist dann $\sigma(1) = 0$. Also gibt es ein $x \in k$ mit

$$\sigma = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta\sigma = \begin{pmatrix} -\zeta & \zeta \\ x & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\delta\sigma)^2 = \begin{pmatrix} \zeta^2 + x\zeta & -\zeta^2 + \zeta \\ -x\zeta + x & x\zeta + 1 \end{pmatrix}$$

Der rechte obere Eintrag von $(\delta\sigma)^3$ ist dann

$$\zeta^3 - \zeta^2 + x\zeta^2 + \zeta = x\zeta^2 - \zeta^2 + (\zeta + 1) = (x - 2)\zeta^2$$

Wegen $(\delta\sigma)^3 = \text{id}$ muss dieser Eintrag 0 sein, also gilt $x = 2$.

Die Fixpunkte von σ sind dann $-\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$, die von $\sigma\delta\sigma$ sind 1 und $-\frac{1}{2}$ (Überprüfung durch Ausrechnen). Die Fixpunkte der übrigen Elemente erhält man durch Anwendung von δ und δ^2 . \square

2.3 Diskontinuierliche Untergruppen

Definition 2.11 Eine Gruppe $G \subset \text{PGL}_2(k)$ operiert *eigentlich diskontinuierlich* auf $X \subseteq \mathbb{P}(k)$, wenn jede G -Bahn lokal endlich ist, das heißt wenn für alle $x \in X$ und alle kompakten Teilmengen K von X nur für endlich viele $\gamma \in G$ gilt: $\gamma(x) \in K$.

Definition 2.12 Sei G eine Untergruppe von $\mathrm{PGL}_2(k)$. Ein Punkt $x \in \mathbb{P}(k)$ heißt *Limespunkt* von G , falls es ein $y \in \mathbb{P}(k)$ und paarweise verschiedene Elemente $\gamma_n \in G$ mit $\lim \gamma_n(y) = x$ gibt. Die Menge der Limespunkte von G bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(G)$.

Definition 2.13 Eine Untergruppe G von $\mathrm{PGL}_2(k)$ heißt *diskontinuierlich*, wenn $\mathcal{L}(G) \neq \mathbb{P}(k)$ und für alle $x \in \mathbb{P}(k)$ der Abschluss der Bahn \overline{Gx} kompakt ist.

Für eine solche Gruppe heißt $\Omega(G) := \mathbb{P}(k) \setminus \mathcal{L}(G)$ der *Diskontinuitätsbereich* von G . Wenn klar ist, welche Gruppe gemeint ist, werden wir im Folgenden dafür nur Ω schreiben.

Ist G zusätzlich frei und endlich erzeugt, so heißt G *Schottkygruppe*.

Eine diskontinuierliche Gruppe $G \subset \mathrm{PGL}_2(k)$ operiert auf $\Omega(G)$, da $\mathcal{L}(G)$ nach Definition G -invariant ist. Wir können also den Quotienten $\Omega(G)/G$ bilden. Solche Quotienten werden wir, wenn wir den richtigen Körper k kennen, in Kapitel 3 als *Mumford-Kurven* bezeichnen.

Sei nun Γ ein Normalteiler von endlichem Index in G . Wir werden in der nächsten Bemerkung zeigen, dass dann $\Omega(\Gamma) = \Omega(G) =: \Omega$ gilt. Damit können wir dann später die galoissche Überlagerung

$$\Omega/\Gamma \rightarrow \Omega/G \cong (\Omega/\Gamma)/(G/\Gamma)$$

betrachten.

Bemerkung 2.14 Sei G eine Untergruppe von $\mathrm{PGL}_2(k)$.

Ist Γ Untergruppe von G von endlichem Index, so gilt $\mathcal{L}(\Gamma) = \mathcal{L}(G)$.

Beweis: $\mathcal{L}(\Gamma) \subseteq \mathcal{L}(G)$ ist klar, wir zeigen also $\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{L}(\Gamma)$. Sei dazu x Limespunkt von G . Dann gibt es ein $y \in \mathbb{P}(k)$ und paarweise verschiedene Elemente $g_n \in G$ mit $\lim g_n(y) = x$. Da $[G : \Gamma]$ endlich ist, können wir ohne Einschränkung die g_n so wählen, dass sie alle in der gleichen Rechtsnebenklasse Γg liegen. Es gibt also Elemente $\gamma_n \in \Gamma$ mit $g_n = \gamma_n \cdot g$. Also sind auch die γ_n paarweise verschieden und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(g(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) = x$$

Damit ist $x \in \mathcal{L}(\Gamma)$. □

Bemerkung 2.15 Sei Γ Untergruppe von $G \subset \mathrm{PGL}_2(k)$ von endlichem Index. Ist Γ diskontinuierlich, so auch G .

Beweis: Nach Bemerkung 2.14 gilt $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(\Gamma) \neq \mathbb{P}(k)$. Sei nun $x \in \mathbb{P}(k)$ und $g_1, \dots, g_n \in G$ ein Vertretersystem der Linksnebenklassen von Γ in G . Dann ist

$$\overline{Gx} = \bigcup_{i=1}^n \overline{(g_i\Gamma)x} = \bigcup_{i=1}^n g_i(\overline{\Gamma x})$$

kompakt. □

Bemerkung 2.16 Eine diskontinuierliche Gruppe G operiert eigentlich diskontinuierlich im Sinne von Definition 2.11 auf $\Omega(G)$.

Beweis: $\Omega(G)$ ist eine G -invariante Menge, G operiert also darauf.

Sei $K \subseteq \Omega$ eine kompakte Menge. Angenommen es gibt ein $x \in \Omega(G)$ und eine Folge paarweise verschiedener $g_i \in G$ mit $y_i := g_i(x) \in K$. Da K kompakt ist, hat die Folge (y_i) eine Teilfolge, die gegen ein $y \in K$ konvergiert. Damit ist $y \in \mathcal{L}(G)$, im Widerspruch zu $y \in K \subseteq \Omega(G)$. \square

Korollar 2.17 Sei G eine diskontinuierliche Gruppe und $\gamma \in G$ ein Element von unendlicher Ordnung (zum Beispiel γ hyperbolisch). Dann ist jeder Fixpunkt von γ ein Limespunkt von G .

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Elemente γ^n paarweise verschieden. Sei x ein Fixpunkt von γ . Dann gilt $\gamma^n(x) \in K$ für jede kompakte Menge, die x enthält. Also gilt $x \notin \Omega(G)$ nach Bemerkung 2.16. \square

Bemerkung 2.18 Sei k algebraisch abgeschlossen, G eine diskontinuierliche Gruppe und $\alpha \in G$ elliptisch. Dann ist $\text{ord}(\alpha)$ endlich.

Beweis: Ohne Einschränkung ist $\alpha : z \mapsto \lambda z$ mit $|\lambda| = 1$. Angenommen alle α^i sind paarweise verschieden, also auch die λ^i . Da G diskontinuierlich ist, ist der Abschluss der Bahn von 1 kompakt. Er enthält alle λ^i . Also gibt es einen Häufungspunkt λ_* der λ^i , also auch einen Häufungspunkt α_* der α^i .

Damit hat für alle $x \in \mathbb{P}(k)$ die Folge $\alpha^i(\alpha_*^{-1}(x))$ eine Teilfolge, die gegen x konvergiert. Daher ist $\mathcal{L}(G) = \mathbb{P}(k)$, also G nicht diskontinuierlich. \square

Kapitel 3

Mumford-Kurven

In diesem Kapitel werden wir nichtarchimedisch bewertete Körper kennenlernen (mehr über solche Körper kann man beispielsweise bei Amice [1] nachlesen). Für einen solchen Körper k bilden die Möbiustransformationen aus $\mathrm{PGL}_2(k)$ Kreise in $\mathbb{P}(k)$ auf Kreise ab. Wir können diese dann benutzen, um Kreise mit Kreisen zu verkleben und werden so algebraische Kurven über k erhalten: die Mumford-Kurven. Wir betrachten weiterhin nur Körper der Charakteristik 0.

3.1 Nichtarchimedische Bewertungen

Definition 3.1 Ein *Betrag* auf k ist eine Abbildung $|\cdot| : k \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} |x| = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \\ |x \cdot y| &= |x| \cdot |y| \\ |x + y| &\leq |x| + |y| \end{aligned}$$

für alle $x, y \in k$. Gilt sogar

$$|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$$

so heißt der Betrag *nichtarchimedisch*.

Die für den nichtarchimedischen Betrag geforderte Ungleichung ist meistens sogar eine Gleichung:

Bemerkung 3.2 Sei $|\cdot|$ ein nichtarchimedischer Betrag auf k . Für $x, y \in k$ gilt: Aus $|x + y| < \max(|x|, |y|)$ folgt $|x| = |y|$.

Beweis: Seien $x, y \in k$ mit $|x + y| < \max(|x|, |y|)$. Es gilt

$$|x| = |x + y - y| \leq \max(|x + y|, |y|)$$

Falls $|x| > |y|$, so gilt $|x| \leq |x + y| < \max(|x|, |y|)$. Dann führen jedoch sowohl $|x| < |x|$, als auch $|x| < |y|$ zum Widerspruch.

Es gilt also $|x| \leq |y|$. Vertauschen von x und y liefert $|x| \geq |y|$. \square

Definition 3.3 Sei k ein nichtarchimedisch bewerteter Körper (das heißt: ein Körper, auf dem es einen nichtarchimedischen Betrag $|\cdot|$ gibt).

$$k^0 := \{x \in k : |x| \leq 1\}$$

heißt *Bewertungsring* von k .

$$k^{00} := \{x \in k : |x| < 1\}$$

ist Ideal in k^0 , und da

$$k^0 \setminus k^{00} = \{x \in k : |x| = 1\} = (k^0)^\times$$

die Einheitengruppe von k^0 ist, ist k^{00} maximales Ideal. Damit ist

$$\bar{k} := k^0/k^{00}$$

ein Körper¹, der *Restklassenkörper* von k .

Bemerkung 3.4 Sei k ein nichtarchimedisch bewerteter Körper, p die Charakteristik des Restklassenkörpers \bar{k} und $q \neq p$ eine Primzahl. Dann gilt

$$|p| < 1 \text{ und } |q| = 1$$

Beweis: Zunächst stellen wir fest, dass für alle $q \in \mathbb{N}$ wegen $q = 1 + \dots + 1$ gilt $|q| \leq |1| = 1$. Also liegt q (und ebenso auch p) in k^0 .

Sei nun $\pi : k^0 \rightarrow \bar{k} = k^0/k^{00}$ die Restklassenabbildung. Da p die Charakteristik von \bar{k} ist, gilt $\pi(p) = 0$ und $\pi(q) \neq 0$. Also gilt $p \in \text{Kern}(\pi)$ und $q \notin \text{Kern}(\pi)$. Mit $\text{Kern}(\pi) = k^{00} = \{x \in k : |x| < 1\}$ folgt die Behauptung. \square

Wir können jedes $x \in \mathbb{Q}$ eindeutig in Primfaktoren zerlegen. Also ist ein nichtarchimedischer Betrag auf \mathbb{Q} durch die Charakteristik p des Restklassenkörpers und deren Betrag $|p|$ bereits vollständig gegeben. Wir werden dies im folgenden Beispiel für $|p| = p^{-1}$ ausprobieren:

Beispiel 3.5 Sei p eine Primzahl. Jedes $x \in \mathbb{Z}$ lässt sich schreiben als $x = p^n \cdot b$, wobei b teilerfremd zu p ist. Wir definieren nun

$$|x| := p^{-n} \text{ und } \left| \frac{x}{y} \right| := \frac{|x|}{|y|}$$

Dies ist der *p-adische Betrag* auf \mathbb{Q} . Man rechnet leicht nach, dass $|\cdot|$ tatsächlich ein nichtarchimedischer Betrag auf \mathbb{Q} ist. Der Bewertungsring ist

$$\mathbb{Q}^0 = \mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} \right\}$$

mit dem maximalen Ideal $\mathbb{Q}^{00} = p\mathbb{Z}_{(p)}$ und dem Restklassenkörper \mathbb{F}_p .

Für $i \in \mathbb{Z}$ sei $a_i \in \{0, \dots, p-1\}$. Dann ist für festes $i_0 \in \mathbb{Z}$ die Folge (x_n) mit

$$x_n := \sum_{i=i_0}^n a_i p^i$$

¹Man kann den Restklassenkörper \bar{k} leicht vom algebraischen Abschluss $\bar{\bar{k}}$ unterscheiden: Ersteres \bar{k} kommt in dieser Arbeit vor, letzteres nicht.

eine Cauchyfolge in \mathbb{Q} bezüglich dem p -adischen Betrag $|\cdot|$, denn $x_n - x_m$ ist teilbar durch $p^{\min(n,m)}$, also gilt

$$|x_n - x_m| \leq p^{-\min(n,m)} \rightarrow 0 \text{ für } n, m \rightarrow \infty$$

Man überlegt sich leicht, dass man zu jeder Cauchyfolge y_n eine Folge x_n in der eben beschriebenen Form findet, so dass $|y_n - x_n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Nun können wir \mathbb{Q} durch Hinzunehmen von Grenzwerten solcher Cauchyfolgen zu einem vollständigen Körper

$$\mathbb{Q}_p := \left\{ x = \sum_{i=i_0}^{\infty} a_i p^i : i_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0, \dots, p-1\}, a_{i_0} \neq 0 \right\}$$

erweitern². Der Betrag eines solchen Elements x ist p^{-i_0} .

Man kann \mathbb{Q}_p nun auch noch algebraisch abschließen, wobei sich der Betrag nichtarchimedisch fortsetzen lässt (wie das geht, werden wir in der folgenden Bemerkung sehen). Wenn man diesen Körper dann wieder vervollständigt, erhält man einen nichtarchimedisch bewerteten algebraisch abgeschlossenen vollständigen Körper \mathbb{C}_p .

Bemerkung 3.6 Sei k vollständig bezüglich eines nichtarchimedischen Betrags und K eine algebraische Körpererweiterung von k vom Grad n . Sei $x \in K$. Wir können K als k -Vektorraum auffassen. Die Multiplikation mit x ist ein Endomorphismus φ_x von K . Sei $N_{K/k}(x)$ die Determinante dieses Endomorphismus.

a) Ist $K = k(x)$, und P das normierte Minimalpolynom von x , so gilt

$$|N_{K/k}(x)| = |P(0)|$$

b) Der Betrag auf k lässt sich durch

$$|x| = |N_{K/k}(x)|^{1/n}$$

eindeutig auf K fortsetzen.

Beweis:

a) Sei $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$

Die Abbildungsmatrix von φ_x bezüglich der Basis $\{x^i : i \in \{0, \dots, n-1\}\}$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & 0 \\ & & 0 & -a_{n-1} \\ & & 1 & -a_n \end{pmatrix}$$

Nun sieht man sofort $N_{K/k}(x) = \det \varphi_x = a_0(-1)^n$, also

$$|N_{K/k}(x)| = |a_0| = |P(0)|$$

²Man sollte sich an dieser Stelle davon überzeugen, dass \mathbb{Q}_p tatsächlich ein Körper ist.

- b) Seien $x, y \in K$. Wir zeigen, dass durch $|x|_K = |N_{K/k}(x)|_k^{1/n}$ der Betrag $|\cdot|_k$ auf K fortgesetzt wird. Für die Eindeutigkeit verweisen wir auf [1], Prop. 2.6.1, wo man den hier geführten Beweis ebenfalls wiederfindet.

Zunächst zeigen wir, dass $|x|_K = |x|_k$ für $x \in k$ ist. In diesem Fall ist nämlich $\varphi_x = x \cdot \text{id}_K$, also $\det \varphi_x = x^n$ und wir erhalten

$$|x|_K = |N_{K/k}(x)|_k^{1/n} = |x^n|_k^{1/n} = |x|_k$$

Nun rechnen wir nach, dass $|\cdot|_K$ ein nichtarchimedischer Betrag ist:

$$|x|_K = 0 \Leftrightarrow |N_{K/k}(x)|_k = 0 \Leftrightarrow N_{K/k}(x) = 0 \Leftrightarrow \det \varphi_x = 0$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn φ_x nicht invertierbar ist, also für $x = 0$.

Wegen $\varphi_{xy} = \varphi_x \circ \varphi_y$ ist $\det \varphi_{xy} = \det \varphi_x \cdot \det \varphi_y$, also

$$|x \cdot y|_K = |N_{K/k}(x \cdot y)|_k^{1/n} = |N_{K/k}(x)|_k^{1/n} \cdot |N_{K/k}(y)|_k^{1/n} = |x|_K \cdot |y|_K$$

Nun muss nur noch $|x + y|_K \leq \max(|x|_K, |y|_K)$ gezeigt werden. Sei dazu ohne Einschränkung $|x|_K \geq |y|_K > 0$. Mit $z := \frac{y}{x}$ gilt dann $|z|_K \leq 1$. Wegen

$$|x + y|_K = |x|_K \cdot \left|1 + \frac{y}{x}\right|_K = |x|_K \cdot |1 + z|_K$$

genügt es nun, $|1 + z|_K \leq 1$ zu zeigen. Sei dazu

$$f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$$

das Minimalpolynom von z im Zwischenkörper $L := k(z)$ mit $a_n = 1$. Es ist dann $g(X) = f(X - 1)$ das Minimalpolynom von $z + 1$. Nach Teil a) gilt

$$|z|_L = |f(0)|_k^{1/n} \quad \text{und} \quad |z + 1|_L = |g(0)|_k^{1/n}$$

Wir wissen bereits: $|z|_L = |f(0)|_k^{1/n} \leq 1$. Daraus folgt $|f(0)|_k \leq 1$.

Weiter gilt

$$|z + 1|_L = |g(0)|_k = |f(1)|_k = \left| \sum_{i=0}^n a_i \right|_k \leq \max_i (|a_i|_k)$$

Sei nun $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $|a_j|_k$ maximal. Wenn wir $|a_j|_k \leq 1$ zeigen können, so gilt damit $|z + 1|_K = |z + 1|_L \leq 1$ und wir sind fertig.

Angenommen also, es wäre $|a_j|_k > 1$. Dann sind im Polynom

$$h(X) := \frac{1}{a_j} f(X) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{a_j} X^i$$

die Beträge aller Koeffizienten kleiner oder gleich 1, also gilt $h \in k^0[X]$. Wegen $|a_0| = |f(0)|_k \leq 1$ wissen wir bereits $|h(0)|_k < 1$, also $h(0) \in k^{00}$. Nun betrachten wir die Restklasse \bar{h} von h in $\bar{k}[X]$. Es gilt $\bar{h} \neq 0$, da der

j -te Koeffizient von h nicht in k^{00} liegt. Außerdem haben wir $\bar{h}(0) = 0$, also gibt es ein $m \geq 1$ und ein $\bar{h}' \in k^0[X]$ mit $\bar{h}(X) = X^m \cdot \bar{h}'(X)$ und $\bar{h}'(0) \neq 0$. Nun sagt das Lemma von Hensel ([1], Théorème 2.5.3), dass sich es zu den Polynomen X^m und $\bar{h}'(X)$ Urbilder h_1 und h_2 in $k[X]$ gibt, für die $h = h_1 h_2$, also $f = a_j h_1 h_2$ gilt. Da f als irreduzibel vorausgesetzt war, führt dies zum Widerspruch. \square

Mit Bemerkung 3.6 können wir einen nichtarchimedischen Betrag auf k auch auf den algebraischen Abschluss K von k fortsetzen, denn dieser ist Vereinigung von endlichen algebraischen Erweiterungen von k . Man nutzt dabei aus, dass die Fortsetzung auf jeder dieser endlichen Erweiterungen eindeutig ist. Den formalen Beweis findet man in [1], Prop. 2.6.10.

Bemerkung 3.7 Sei ζ_n eine primitive n -te Einheitswurzel. Dann gilt:

$$|1 - \zeta_n| = |p|^{1/(p^{\nu-1}(p-1))} \quad \text{für } n = p^\nu \text{ und ansonsten } |1 - \zeta_n| = 1$$

Beweis: Sei $K = k(\zeta_n) = k(\zeta_n - 1)$. Das Minimalpolynom von ζ_n ist das n -te Kreisteilungspolynom³ Φ_n , dessen Grad $\varphi(n)$ berechnet man mit der Eulerschen φ -Funktion.

Das Minimalpolynom von $\zeta_n - 1$ ist damit $P(X) = \Phi_n(X + 1)$. Es gilt also $P(0) = \Phi_n(1)$. Bemerkung 3.6 sagt in dieser Situation

$$|1 - \zeta_n| = |\Phi_n(1)|^{\frac{1}{\varphi(n)}}$$

Für $n = p^\nu$ gilt $\varphi(n) = p^{\nu-1}(p-1)$. Es bleibt also zu zeigen: Für $n = p^\nu$ ist $|\Phi_n(1)| = p$, ansonsten ist $|\Phi_n(1)| = 1$.

Ist $n = p_1^{\nu_1} \cdots p_s^{\nu_s}$ die Primfaktorzerlegung von n , so gilt nach [2], Aufg. 4.5.8:

$$\Phi_n(X) = \Phi_{p_1 \cdots p_s} \left(X^{p_1^{\nu_1-1} \cdots p_s^{\nu_s-1}} \right) \quad \text{und} \quad \Phi_{p_1 m}(X) = \frac{\Phi_m(X^{p_1})}{\Phi_m(X)} \quad \text{mit } p_1 \nmid m$$

Also gilt $\Phi_n(1) = \Phi_{p_1 \cdots p_s}(1)$ und für $s \geq 2$ folgt mit der zweiten Gleichung $\Phi_n(1) = 1$. Für $s = 1$ gilt

$$\Phi_{p_1}(X) = \frac{X^{p_1} - 1}{X - 1} = X^{p_1-1} + \cdots + X + 1$$

Also gilt in diesem Fall $\Phi_n(1) = p_1$. Mit $|p_1| = 1$ für $p_1 \neq p$ folgt damit

$$|\Phi_n(1)| = \begin{cases} |p_1| & \text{für } n = p_1^{\nu_1} \\ |1| = 1 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} |p| & \text{für } n = p^\nu \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

3.2 Das System der Kreisscheiben

Ab jetzt sei k ein nichtarchimedisch bewerteter Körper. Wir wollen nun untersuchen, wie sich Kreisscheiben in $\mathbb{P}(k)$ unter der Aktion von $\text{PGL}_2(k)$ verhalten. Dazu werden wir (wie beispielsweise auch Herrlich in [8] und [9]) das System \mathcal{K}

³Wer Φ_n und $\varphi(n)$ nicht kennt, kann dies in [2], Abschnitt 4.5 nachschlagen.

der Kreisscheiben in $\mathbb{P}(k)$ definieren, sowie ein System \mathcal{K} von Äquivalenzklassen von Kreisscheiben. $\mathrm{PGL}_2(k)$ wird auf beiden operieren.

Offensichtlich wird der Kreis $\{x \in \mathbb{P}(k) : |x| \leq 1\}$ durch die Möbiustransformation $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf die Menge

$$\{x \in \mathbb{P}(k) : |x| \geq 1\} = \mathbb{P}(k) \setminus \{x \in \mathbb{P}(k) : |x| < 1\}$$

abgebildet. Wir werden daher im Folgenden auch solche „Kreise um ∞ “ als Kreisscheiben zulassen.

Definition 3.8 Zu $x \in k$ und einem Radius $r \in \mathbb{R}_+$ seien

$$K^+(x, r) := \{y \in \mathbb{P}(k) : |x - y| \leq r\}$$

$$K^-(x, r) := \{y \in \mathbb{P}(k) : |x - y| < r\}$$

Weiter sei

$$\tilde{\mathcal{K}} := \{K^+(x, r), \mathbb{P}(k) \setminus K^-(x, r) : x \in k, r \in \mathbb{R}_+\}$$

das System der *Kreisscheiben* in $\mathbb{P}(k)$.

Für jedes $K \in \tilde{\mathcal{K}}$ gibt es einen eindeutigen Radius $\mathrm{rad}(K) \in \mathrm{Bild}(|\cdot|)$.

Bemerkung 3.9 Sei $x \in k$ und $r \in \mathbb{R}$.

Für $y \in K^+(x, r)$ gilt: $K^+(x, r) = K^+(y, r)$.

Das heißt: Jeder Punkt eines (endlichen) Kreises ist dessen Mittelpunkt.

Beweis: Für $z \in \mathbb{P}(k)$ gilt

$$|z - y| = |z - x + x - y| \leq \max(|z - x|, |x - y|)$$

Mit $|x - y| \leq r$ folgt $|z - x| \leq r \Rightarrow |z - y| \leq r$.

Vertauschen von x und y liefert die andere Richtung. \square

Wir wollen nun zeigen, dass $\mathrm{PGL}_2(k)$ auf $\tilde{\mathcal{K}}$ operiert. Dazu werden wir dies zunächst für die Abbildungen $z \mapsto az + b$ und $z \mapsto \frac{1}{z}$ zeigen. Danach werden wir zeigen, dass sich jedes Element der $\mathrm{PGL}_2(k)$ als Komposition von solchen Elementen schreiben lässt.

Lemma 3.10 Seien $a, b, x \in k$ und $r \in \mathbb{R}_+$, sowie $\beta : z \mapsto az + b$ und $\sigma : z \mapsto \frac{1}{z}$. Dann gilt:

a) $\beta(K^+(x, r)) = K^+(b + ax, r \cdot |a|)$

b) $\sigma(K^+(x, r)) = \mathbb{P}(k) \setminus K^-(0, \frac{1}{r})$ für $|x| \leq r$

c) $\sigma(K^+(x, r)) = K^+(\frac{1}{x}, \frac{r}{|x|^2})$ für $|x| > r$

d) Aussagen a) bis c) gelten auch, wenn man jeweils K^+ und K^- vertauscht.

Beweis:

a) Sei $x \in k$ und $r \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z \in \beta(K^+(x, r)) &\Leftrightarrow \beta^{-1}(z) \in K^+(x, r) \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{z-b}{a} - x \right| \leq r \\ &\Leftrightarrow |z - (b + ax)| \leq r \cdot |a| \end{aligned}$$

b) Für $|x| \leq r$ gilt $K^+(x, r) = K^+(0, r)$, also

$$z \in \sigma(K^+(x, r)) \Leftrightarrow \sigma^{-1}(z) \in K^+(0, r) \Leftrightarrow \left| \frac{1}{z} \right| \leq r \Leftrightarrow |z| \geq \frac{1}{r}$$

c) Es gilt $|x| > r \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} > \frac{r}{|x|^2}$ und damit

$$\begin{aligned} z \in \sigma(K^+(x, r)) &\Leftrightarrow \left| \frac{1}{z} - x \right| \leq r \\ &\Leftrightarrow |1 - zx| \leq r \cdot |z| \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} - z \right| \leq r \frac{|z|}{|x|} \end{aligned} \quad (*)$$

Sei nun $z \in \sigma(K^+(x, r))$. Dann ist $\left| \frac{1}{z} - x \right| \leq r$, aber $|x| > r$, also $\left| \frac{1}{z} \right| = |x|$ nach Bemerkung 3.2. Mit (*) folgt dann $|z - \frac{1}{x}| \leq \frac{r}{|x|^2}$, also $z \in K^+\left(\frac{1}{x}, \frac{r}{|x|^2}\right)$.

Sei andererseits $z \in K^+\left(\frac{1}{x}, \frac{r}{|x|^2}\right)$. Aus $|z - \frac{1}{x}| \leq \frac{r}{|x|^2}$ und $\frac{1}{|x|} > \frac{r}{|x|^2}$ folgt wieder mit Bemerkung 3.2 $|z| = \left| \frac{1}{x} \right|$, also $\left| \frac{1}{x} - z \right| \leq r \frac{|z|}{|x|}$, und mit (*) folgt daraus $z \in \sigma(K^+(x, r))$.

Wir haben damit für $|x| > r$ insgesamt $\sigma(K^+(x, r)) = K^+\left(\frac{1}{x}, \frac{r}{|x|^2}\right)$ gezeigt.

d) Sei $\alpha \in \text{PGL}_2(k)$. Es gilt

$$K^-(x, r) = \bigcup_{r' < r} K^+(x, r')$$

also auch

$$\alpha(K^-(x, r)) = \bigcup_{r' < r} \alpha(K^+(x, r'))$$

Damit folgt die Behauptung aus a) bis c). □

Bemerkung 3.11 $\text{PGL}_2(k)$ operiert auf der Menge \mathcal{H} der Kreisscheiben.

Beweis: Sei $\alpha \in \text{PGL}_2(k)$. Dann gibt es $a, b, c, d \in k$ mit $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $ad - bc \neq 0$. Falls $c \neq 0$ ist, erhalten wir

$$\begin{pmatrix} bc - ad & ac \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac^2 & bc^2 \\ c^3 & dc^2 \end{pmatrix} = \alpha$$

Es genügt also, die Behauptung für $\beta := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\sigma := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zu überprüfen. Dies haben wir in Lemma 3.10 bereits getan. \square

Bemerkung 3.12 Die Funktion

$$f : \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}; \begin{cases} K^+(x, r) & \mapsto K^+(x, r) \\ \mathbb{P}(k) \setminus K^-(x, r) & \mapsto K^+(x, r) \end{cases}$$

ordnet jeder unendlichen Kreisscheibe die dazu komplementäre endliche Kreisscheibe zu. Man beachte dabei allerdings, dass sich die Kreise überlappen:

$$K^+(x, r) \cap (\mathbb{P}(k) \setminus K^-(x, r)) = \{y \in k : |y - x| = r\}$$

Die Funktion f ist verträglich mit der Operation von $\mathrm{PGL}_2(k)$ auf $\tilde{\mathcal{K}}$. Also operiert $\mathrm{PGL}_2(k)$ auch auf den Äquivalenzklassen

$$\mathcal{K} := \tilde{\mathcal{K}} / \sim \text{ mit } K_1 \sim K_2 :\Leftrightarrow f(K_1) = f(K_2) \text{ für } K_1, K_2 \in \tilde{\mathcal{K}}$$

Die folgende Halbordnung \subseteq auf $\tilde{\mathcal{K}}$ ist nach Definition auch auf \mathcal{K} erklärt:

$$K_1 \subseteq K_2 :\Leftrightarrow f(K_1) \subseteq f(K_2) \text{ für } K_1, K_2 \in \tilde{\mathcal{K}}$$

Auch die Abbildung rad ist invariant unter \sim , sie ist also ebenfalls auf \mathcal{K} definiert.

Beweis: Zunächst stellen wir fest, dass f wohldefiniert ist, denn für $x_1, x_2 \in k$ und $r \in \mathbb{R}_+$ mit $K^-(x_1, r) = K^-(x_2, r)$ ist $x_1 \in K^+(x_2, r)$, also sind die Kreise $K^+(x_1, r)$ und $K^+(x_2, r)$ nach Bemerkung 3.9 gleich.

Die Verträglichkeit von f mit $\beta : z \mapsto az + b$ und $\sigma : z \mapsto \frac{1}{z}$ folgt direkt aus Lemma 3.10 d). Alle anderen Möbiustransformationen lassen sich wieder wie im Beweis von Bemerkung 3.11 als Komposition von β und σ darstellen.

Die übrigen Aussagen sind klar. \square

Bemerkung 3.13 Zwei endliche Kreise $K_1, K_2 \in \tilde{\mathcal{K}}$ sind entweder ineinander enthalten oder disjunkt.

Beweis: Sei $K_1 = K^+(x_1, r_1)$ und $K_2 = K^+(x_2, r_2)$. Ohne Einschränkung sei $r_1 \leq r_2$. Angenommen die Kreise sind nicht disjunkt, dann gibt es ein y in $K_1 \cap K_2$. Also ist nach Bemerkung 3.9

$$K_1 = K^+(x_1, r_1) = K^+(y, r_1) = K^+(x_2, r_1) \subseteq K^+(x_2, r_2) = K_2 \quad \square$$

Korollar 3.14 Seien $K, K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ mit $K \subseteq K_1$ und $K \subseteq K_2$.

Dann gilt $K_1 \subseteq K_2$ oder $K_2 \subseteq K_1$. \square

Bemerkung 3.15 Seien $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Kreisscheibe $M(K_1, K_2) \in \mathcal{K}$ mit $K_1, K_2 \subseteq M(K_1, K_2)$ und $\mathrm{rad} M(K_1, K_2)$ minimal.

Beweis: Sei $K_1 = K^+(x_1, r_1)$ und $K_2 = K^+(x_2, r_2)$. Sei $K = K^+(x, r) \in \mathcal{K}$ mit $K_1, K_2 \subseteq K$. Wegen $x_1 \in K$ können wir ohne Einschränkung $x = x_1$ setzen. Es muss dann $r \geq r_1$ gelten. Wegen $x_2 \in K$ muss ebenfalls $r \geq r_2$ gelten, außerdem muss $|x_1 - x_2| \leq r$ sein.

Setze nun $r := \max(r_1, r_2, |x_1 - x_2|)$. Für $M(K_1, K_2) := K^+(x_1, r) = K^+(x_2, r)$ gilt $K_1, K_2 \subseteq M(K_1, K_2)$. Für kleineres r ist dies wie oben gezeigt nicht möglich. \square

Bemerkung 3.16 Seien $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$. Dann gibt es ein $\alpha \in \text{PGL}_2(k)$ mit

$$\alpha(K_1) \subseteq \alpha(M(K_1, K_2)) \subseteq \alpha(K_2)$$

Beweis: Falls K_1 in K_2 enthalten ist, ist die Behauptung klar, bei $K_2 \subseteq K_1$ mit $\alpha : z \mapsto \frac{1}{z}$ ebenfalls. Also müssen wir die Behauptung (nach Bemerkung 3.13) nur noch für disjunkte Kreise K_1 und K_2 beweisen.

Seien $K_1 = K^+(x_1, r_1)$ und $K_2 = K^+(x_2, r_2)$, sowie $M := M(K_1, K_2)$. Wähle $r \in \text{Bild}(|\cdot|)$ mit $M = K^+(x_1, r)$. Durch Anwendung einer Möbiustransformation mit Fixpunkt ∞ setzen wir ohne Einschränkung $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Dies ist erlaubt, weil dadurch nach Lemma 3.10 a) alle Kreise endlich bleiben. Da K_1 und K_2 disjunkt sind, folgt $r_1 < 1$ und $r_2 < 1$, sowie $r = 1$.

Nun wenden wir $\alpha : z \mapsto \frac{1}{z}$ an. Wir erhalten mit Lemma 3.10 den endlichen Kreis $\alpha(K_2) = K^+(1, r_2)$, sowie die unendlichen Kreise

$$\alpha(K_1) = \mathbb{P}(k) \setminus K^-(0, \frac{1}{r_1}) \quad \text{und} \quad \alpha(M) = \mathbb{P}(k) \setminus K^-(0, 1)$$

Nun betrachten wir die endlichen Repräsentanten dieser Kreise:

$$\alpha(K_1)' = K^+(0, \frac{1}{r_1}) \quad \text{und} \quad \alpha(M)' = K^+(0, 1)$$

Wegen $\frac{1}{r_1} > 1 > r_2$ folgt die Behauptung. \square

3.3 Mumford-Kurven

Jetzt haben wir alle Vorarbeiten für die Konstruktion von Mumford-Kurven hinter uns. Wir kommen nun wieder auf das Beispiel 1.3 zurück: Wir werden Kreise aus $\mathbb{P}(k)$ ausschneiden und die Ränder der Löcher dann durch Möbiustransformationen miteinander identifizieren. Diese Konstruktion findet man genauso bei Gerritzen und van der Put in [6].

Satz 3.17 Für $n \in \mathbb{N}$ seien $K_1, \dots, K_{2n} \in \tilde{\mathcal{K}}$ disjunkte Kreise. Zu jedem endlichen Kreis $K_i = K^+(x_i, r_i)$ sei $K_i^- := K^-(x_i, r_i)$. Zu einem unendlichen Kreis $K_i = \mathbb{P}(k) \setminus K^-(x_i, r_i)$ sei $K_i^- := \mathbb{P}(k) \setminus K^+(x_i, r_i)$. Die K_i^- sind abhängig von den gewählten x_i , seien diese daher fest gewählt.

Seien weiter $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \text{PGL}_2(k)$ hyperbolisch mit

$$\gamma_i^{-1}(K_i) = \mathbb{P}(k) \setminus K_{2n+1-i}^- \quad \text{und} \quad \gamma_i^{-1}(K_i^-) = \mathbb{P}(k) \setminus K_{2n+1-i}^+$$

für $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt:

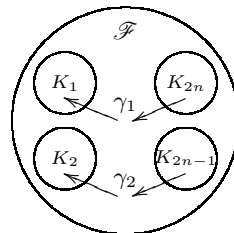
- a) $\Gamma := \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$ ist eine Schottkygruppe.
- b) $\mathcal{F} := \mathbb{P}(k) \setminus \bigcup_{i=1}^{2n} K_i^-$ ist ein Fundamentalbereich für Γ
- c) $\Omega(\Gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\mathcal{F})$
- d) Ω/Γ ist eine nichtsinguläre projektive Kurve vom Geschlecht n .

Beweis: Sei

$$\mathcal{F}' := \mathbb{P}(k) \setminus \bigcup_{i=1}^{2n} K_i$$

das Innere von \mathcal{F} .

Ohne Einschränkung sei $\infty \in \mathcal{F}'$.



- a) Setze $\gamma_{2n+1-i} := \gamma_i^{-1}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Für jedes $i \in \{1, \dots, 2n\}$ und $x \in \mathbb{P}(k) \setminus K_{2n+1-i}$ gilt dann $\gamma_i(x) \in K_i$.

Sei $\gamma := \gamma_{i_k} \dots \gamma_{i_1}$ ein gekürztes Wort in den γ_i und $x \in \mathcal{F}'$. Durch Induktion über k sehen wir $\gamma(x) \in K_{i_k}$. Also ist $\gamma(x) \neq x$ und somit $\gamma \neq \text{id}$. Damit ist Γ frei.

Angenommen $\tilde{y} \in \mathcal{F}'$ wäre Limespunkt von Γ . Dann gäbe es ein $x \in \mathbb{P}(k)$ und eine Folge paarweise verschiedener $\gamma'_i \in \Gamma$ mit $\gamma'_i(x) \in \mathcal{F}'$ für unendlich viele i . Dies werden wir nun widerlegen.

Sei also $x \in \mathbb{P}(k)$ und $\gamma := \gamma_{i_k} \dots \gamma_{i_1}$ ein gekürztes Wort wie oben mit $y := \gamma^{-1}(x) \in \mathcal{F}'$. Es gilt $x = \gamma(y) \in K_{i_k}$. Falls $x \in K_i$ ist, so folgt $i_k = i$. Ebenso gilt: Falls $\gamma_{i_k}^{-1}(x) \in K_j$ ist, so folgt $i_{k-1} = j$. Diesen Prozess setzen wir induktiv fort und haben somit γ eindeutig bestimmt. Es gibt also keine Folge von paarweise verschiedenen Elementen aus Γ mit $\gamma^{-1}(x) \in \mathcal{F}'$. Damit ist $\mathcal{F} \subseteq \Omega(\Gamma)$, also $\mathcal{L}(\Gamma) \neq \mathbb{P}(k)$.

Bleibt noch zu zeigen: Für $x \in \mathbb{P}(k)$ ist $\overline{\Gamma x}$ kompakt. Hierfür verweisen wir auf [6], Chap. I, § 4.1.3.

- b) Wir zeigen $\mathcal{F}' \cap \gamma(\mathcal{F}') = \emptyset$ für $\gamma \neq \text{id}$:

Sei $\gamma \in \Gamma$ und $x \in \gamma(\mathcal{F}')$. In a) wurde bereits gezeigt, dass γ durch x eindeutig bestimmt ist. Wenn also x in $\mathcal{F}' \cap \gamma(\mathcal{F}')$ liegt, so folgt daraus $\gamma = \text{id}$.

Der Rest folgt aus c)

- c) Aus a) wissen wir bereits $\mathcal{F} \subseteq \Omega(\Gamma)$, also auch

$$O := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\mathcal{F}) \subseteq \Omega(\Gamma)$$

da $\Omega(\Gamma)$ invariant unter Γ ist.

Zu zeigen ist noch $\mathbb{P}(k) \setminus O \subseteq \mathcal{L}(\Gamma)$. Sei also $x \in \mathbb{P}(k) \setminus O$. Dann ist $x \notin \mathcal{F}$, also gibt es ein $i \in 1, \dots, 2n$ mit $x \in K_i$. Die Abbildung γ_i bildet \mathcal{F} in das Innere von K_i ab. Wegen $x \notin \gamma_i(\mathcal{F})$ gibt es wieder ein $j \in 1, \dots, 2n$

mit $x \in \gamma_i(K_j)$. Dieser Prozess lässt sich induktiv fortsetzen. Der Punkt x ist also in einer Folge immer kleiner werdender Kreise enthalten, in denen jeweils auch ein Bild des Fundamentalbereichs enthalten ist. Damit haben wir eine Folge in $(\gamma'_i) \subset \Gamma$ gefunden, für die $\gamma'_i(\mathcal{F})$ gegen x konvergiert, also ist x Limespunkt.

d) Diese fundamentale Aussage wird in [6], Chap. III, 2.2 bewiesen.⁴ \square

Bemerkung 3.18 Sei Γ eine Schottkygruppe. Dann gibt es einen Fundamentalbereich \mathcal{F} von Γ wie in Satz 3.17.

Der Beweis hierfür findet sich in [6], Chap. I, Theorem 4.3.

Definition 3.19 Eine nichtsinguläre projektive algebraische Kurve der Form

$$\Omega(\Gamma)/\Gamma \quad (\text{mit } \Gamma \subseteq \text{PGL}_2(k) \text{ Schottkygruppe})$$

heißt *Mumford-Kurve*. Sie hat nach Bemerkung 3.18 und Satz 3.17 d) das Geschlecht $\text{Rang}(\Gamma)$.

Ein *Mumford-Origami* ist ein Origami $X \rightarrow Y$, wobei X Mumford-Kurve ist.⁵

Um eine algebraische Kurve zu erhalten, ist es nicht notwendig, dass Γ eine Schottkygruppe ist. Es genügt eine endlich erzeugte, diskontinuierliche Gruppe. Diese Verallgemeinerung von Satz 3.17 d) werden wir nun ebenfalls aus [6] importieren:

Satz 3.20 Sei $G \subset \text{PGL}_2(k)$ endlich erzeugt und diskontinuierlich. Dann gilt:

- G enthält eine Schottkygruppe Γ als Normalteiler von endlichem Index.
- $\Omega(G)/G$ ist eine projektive algebraische Kurve, ihr Geschlecht ist der Rang von G als abelsche Gruppe.⁶

Beweis:

a) Siehe [6], Chap. I, Theorem 3.1 (1).

b) Hier sollten wir zunächst die Aussage präzisieren: Sei

$$[G, G] := \langle \alpha\beta\alpha\beta^{-1} : \alpha, \beta \in G \rangle$$

die *Kommutatorgruppe* von G . Dann ist $\overline{G} := G/[G, G]$ eine abelsche Gruppe. Hierin sei nun

$$\text{Tor}(\overline{G}) := \{ \alpha \in \overline{G} : \text{ord}(\alpha) < \infty \}$$

die *Torsionsgruppe* von \overline{G} . Damit ist $G' := \overline{G}/\text{Tor}(\overline{G})$ nach dem Struktursatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen ([2], 2.9, Kor. 9) eine freie abelsche Gruppe. Mit dem Rang von G als abelsche Gruppe meinen wir den Rang von G' .

Zum Beweis der Aussage verweisen wir auf [6], Chap. VIII, §4.3. Da die Aussage dort nur schwer wiederzufinden ist, sollte man zuerst die Einführung von [6], Chap. VIII lesen. \square

⁴Dort wird auch erklärt, in welchem Sinn hier „ist“ zu verstehen ist.

⁵Nach Definition 1.17 ist Y hier eine nichtsinguläre projektive Kurve vom Geschlecht 1.

⁶Im Beweis wird noch genauer erklärt, wie man aus G die freie abelsche Gruppe macht, deren Rang hier gemeint ist.

Wir wollen uns mit galoisschen Mumford-Origamis beschäftigen. Nach Bemerkung 1.20 sind dies ein Mumford-Origami $X \rightarrow X/G$, wobei $G \subseteq \text{Aut}(X)$ ist.⁷ Wir interessieren uns daher nun dafür, wie die Untergruppen von $\text{Aut}(X)$ aussehen:

Bemerkung 3.21 Sei Ω/Γ eine Mumford-Kurve mit $g(\Omega/\Gamma) \geq 2$.

a) Sei $G \subseteq \text{PGL}_2(k)$ und Γ ein Normalteiler von endlichem Index in G . Dann ist G/Γ eine Untergruppe von $\text{Aut}(\Omega/\Gamma)$.

b) Alle Untergruppen von $\text{Aut}(\Omega/\Gamma)$ sind von dieser Form.

Beweis: In [6], Chap. VII, §1.1 finden wir $\text{Aut}(\Omega/\Gamma) \cong N(\Gamma)/\Gamma$, wobei $N(\Gamma)$ der Normalisator von Γ ist (das heißt: die größte Gruppe in $\text{PGL}_2(k)$, in der Γ Normalteiler ist). Die Untergruppen von $N(\Gamma)/\Gamma$ sind genau die Faktorgruppen G/Γ für alle Gruppen $G \subset N(\Gamma)$, die Γ enthalten.

Für $g(\Omega/\Gamma) \geq 2$ ist G/Γ endlich, da bereits $N(\Gamma)/\Gamma \cong \text{Aut}(\Omega/\Gamma)$ endlich ist (was wir beispielsweise in [6], Chap. VII, 4.1 nachlesen können). \square

Nun können wir also alle Mumford-Origamis folgendermaßen charakterisieren:

Bemerkung 3.22 Sei G eine diskontinuierliche Untergruppe von $\text{PGL}_2(k)$ und Γ eine Schottkygruppe mit $\text{Rang}(\Gamma) \geq 2$, die Normalteiler von endlichem Index in G ist. Dann ist die Überlagerung $f : \Omega/\Gamma \rightarrow \Omega/G$ galoissch.

Andererseits ist jede galoissche Überlagerung $f : \Omega/\Gamma \rightarrow X$ von dieser Form.

Beweis: Seien G und Γ gegeben. Nach Bemerkung 3.21 a) ist G/Γ eine Untergruppe von $\text{Aut}(\Omega/\Gamma)$. Wegen

$$\Omega/G \cong (\Omega/\Gamma) / (G/\Gamma)$$

ist f nach Bemerkung 1.20 galoissch.

Sei andererseits $f : \Omega/\Gamma \rightarrow X$ galoissch. Dann gibt es nach Bemerkung 1.20 eine Untergruppe \tilde{G} von $\text{Aut}(\Omega/\Gamma)$ mit $X \cong (\Omega/\Gamma)/\tilde{G}$. Nach Bemerkung 3.21 b) ist \tilde{G} dann isomorph zu einer Gruppe G/Γ , wobei G die geforderten Eigenschaften erfüllt. Daraus folgt $X \cong \Omega/G$. \square

3.4 Der Baum einer Gruppe

Zu einer diskontinuierlichen Gruppe $G \subset \text{PGL}_2(k)$ werden wir in diesem Abschnitt einen Baum $\mathcal{B}(G)$ konstruieren, auf dem G operiert. Dabei orientieren wir uns Herrlichs Konstruktion aus [8]. Ein ähnlicher Baum wurde von Gerritzen und van der Put in [6] konstruiert.

Definition 3.23 Ein Betrag $|\cdot|$ heißt *diskret*, falls $\text{Bild}(|\cdot|) \setminus \{0\}$ diskret in \mathbb{R} ist.

⁷Da ein Origami als Überlagerung von algebraischen Kurven definiert ist, sind in diesem Zusammenhang mit $\text{Aut}(X)$ immer die Automorphismen von X als algebraische Kurve gemeint.

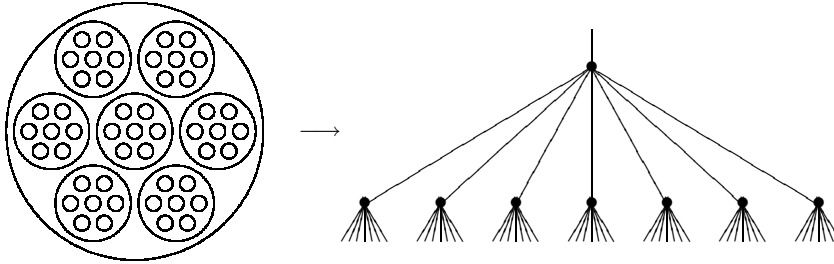
Bemerkung 3.24 Wenn der Betrag $|\cdot|$ auf k diskret und $|\bar{k}|$ endlich ist, dann gibt es zu jedem Kreis $K \in \mathcal{K}$ genau $|\bar{k}|$ maximale Kreise K' mit $K' \subsetneq K$.

Beweis: Sei $K := K^+(x, r) \in \mathcal{K}$ und $y \in K$ mit $|x - y| = r$ und $y \neq 0$. Jeder Kreis, der echt in K enthalten ist, muss einen kleineren Radius als r haben. Da $|\cdot|$ diskret ist, gibt es ein maximales $r' \in \text{Bild}(|\cdot|)$ mit $r' < r$. Wir betrachten nun zu $x_1, x_2 \in K$ die Kreise $K_1 := K^+(x_1, r')$ und $K_2 := K^+(x_2, r')$. Nun gilt $|\frac{x_1}{y}| \leq 1$, also $\frac{x_1}{y} \in k^0$, ebenso $\frac{x_2}{y} \in k^0$. Weiter gilt:

$$K_1 = K_2 \Leftrightarrow |x_2 - x_1| \leq r' \Leftrightarrow \left| \frac{x_2}{y} - \frac{x_1}{y} \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{x_2}{y} - \frac{x_1}{y} \in k^{00}$$

Also sind K_1 und K_2 genau dann gleich, wenn die Bilder von $\frac{x_1}{y}$ und $\frac{x_2}{y}$ in \bar{k} gleich sind. Es gibt also maximal $|\bar{k}|$ solche Kreise. Da die Restklassenabbildung $k^0 \rightarrow \bar{k}$ surjektiv ist, gibt es genau $|\bar{k}|$ solche Kreise. \square

Beispiel 3.25 Der p -adische Betrag auf \mathbb{Q}_p ist diskret und der Restklassenkörper \mathbb{F}_p hat genau p Elemente. Daher liegen nach Bemerkung 3.24 in jedem Kreis in \mathbb{Q}_p genau p maximale Kreise. Dies liefert auf natürliche Weise eine Baumstruktur auf den Kreisen in \mathbb{Q}_p , hier gezeigt für $p = 7$:



Bemerkung 3.26 Wenn der Betrag auf k diskret und $|\bar{k}|$ endlich ist, dann ist der Graph \mathcal{B} mit Eckenmenge \mathcal{K} und Kantenmenge

$$K := \{(K_1, K_2) : K_1 \subsetneq K_2 \text{ maximal}\}$$

ein Baum, in dem jede Ecke den Grad $|\bar{k}| + 1$ hat, und auf dem $\text{PGL}_2(k)$ operiert. Dieser Baum heißt der *Bruhat-Tits-Baum* von k .

Beweis: Der Graph ist zusammenhängend, denn zu je zwei Kreisen K_1, K_2 gibt es den Kreis $M(K_1, K_2)$, der beide enthält. Außerdem enthält der Graph keinen Zyklus, denn sonst gäbe es Kreise $K, K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, so dass $K \subseteq K_1$ und $K \subseteq K_2$, aber $K_1 \not\subseteq K_2$ und $K_2 \not\subseteq K_1$. Dies widerspräche Korollar 3.14.

Jeder Kreis K enthält nach Bemerkung 3.24 genau $|\bar{k}|$ maximale Kreise und ist selbst in genau einem minimalen Kreis enthalten. Daher ist der Grad dieser Ecke $|\bar{k}| + 1$.

Wir wissen bereits aus Bemerkung 3.11, dass $\text{PGL}_2(k)$ auf \mathcal{K} operiert. Es bleibt zu zeigen, dass diese Operation auch mit den Kanten von \mathcal{B} verträglich ist. Seien also $K_1, K_2 \in K$ endlich mit $K_1 \subsetneq K_2$ maximal und $\alpha \in \text{PGL}_2(k)$. Falls $\alpha^{-1}(\infty)$ nicht in K_2 liegt, so sind die Bilder beider Kreise endlich, es ist also immer noch

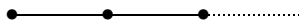
$\alpha(K_1) \subsetneq \alpha(K_2)$ maximal. Falls $\alpha^{-1}(\infty)$ in K_1 liegt, so sind die Bilder beider Kreise unendlich, für die zugeordneten endlichen Kreise ist dann $\alpha(K_1) \supsetneq \alpha(K_2)$ minimal.

Der schwierigste Fall ist $\alpha^{-1}(\infty) \in K_2 \setminus K_1$. Dann ist $\alpha(K_1)$ endlich, $\alpha(K_2)$ jedoch unendlich. Nun müssen wir den $\alpha(K_2)$ zugeordneten endlichen Kreis K bestimmen. Wegen $\alpha(K_1) \subsetneq \alpha(K_2)$ enthält $\mathbb{P}(k) \setminus \alpha(K_2)$ den Kreis $\alpha(K_1)$ nicht. Zum Glück ist jedoch K etwas größer als dieses Komplement (vergleiche hierzu Bemerkung 3.12), und da $\alpha(K_1)$ maximal in $\alpha(K_2)$ war, kann der Schnitt von $\alpha(K_1)$ mit K nicht leer sein. Daraus folgt $\alpha(K_1) \subsetneq K$ maximal. \square

Definition 3.27 Sei \mathcal{B} ein Baum. Eine *Achse* von \mathcal{B} ist ein Teilgraph von \mathcal{B} isomorph zu



Ein *Strahl* von \mathcal{B} ist ein Teilgraph von \mathcal{B} isomorph zu



Ein *Ende* von \mathcal{B} ist eine Äquivalenzklasse E von Strahlen, wobei zwei Strahlen e_1 und e_2 genau dann äquivalent sein sollen, wenn $|e_1 \cap e_2| = \infty$ ist (dies ist eine Äquivalenzrelation, denn da \mathcal{B} ein Baum ist, ist $e_1 \cap e_2$ wieder ein Strahl; damit lässt sich die Transitivität zeigen).

Bemerkung 3.28 Die Enden von \mathcal{B} entsprechen bijektiv den Punkten in $\mathbb{P}(k)$.

Beweis: Wir definieren eine Funktion f wie folgt:

Sei E ein Ende von \mathcal{B} und $S = \{K_1, K_2, \dots\}$ ein Strahl in E . Falls $\text{rad}(K_i) \rightarrow 0$, so sei ohne Einschränkung $K_i \supset K_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dem Strahl S ordnen wir den Punkt $f(S)$ mit $\{f(S)\} = \bigcap K_i \in k$ zu. Falls andererseits $\text{rad}(K_i) \rightarrow \infty$, so sei $f(S) := \infty$.

Wenn wir einen anderen Repräsentanten von E wählen, so ändern wir nur endlich viele Kreise, $f(S)$ ändert sich also nicht. Somit ist f eine Funktion auf den Enden von \mathcal{B} . Wählen wir ein anderes Ende, so gibt es einen zu S disjunkten Repräsentanten und wir erhalten ein anderes $f(S)$. Also ist f injektiv. Zu jedem $x \in k$ finden wir eine Folge von ineinander liegenden Kreisen, die x enthalten. Damit ist f surjektiv. \square

Der Bruhat-Tits-Baum \mathcal{B} hat leider einige Nachteile: Ist zum Beispiel der Betrag auf k nicht diskret, so ist \mathcal{B} nicht mehr lokal-endlich (das heißt: Es gibt Ecken mit unendlich vielen Kanten). Für gewöhnlich wollen wir mit einem algebraisch abgeschlossenen Körper arbeiten. Man sieht leicht, dass für ein Element $x \in k$ mit $|x| \neq 1$ die Folge $|\sqrt[n]{x}|$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 1 konvergiert. Ein (nichttrivialer) Betrag auf einem algebraisch abgeschlossenen Körper kann daher nicht diskret sein.

Für eine diskontinuierliche Gruppe G werden wir daher nun einen lokal-endlichen Graphen $\mathcal{B}(G)$ konstruieren, auf dem G operiert. Dieser entsteht aus \mathcal{B} durch Weglassen aller Ecken und Kanten, die nicht unbedingt benötigt werden. Insbesondere wird der Quotientengraph $\mathcal{B}(G)/G$ endlich sein (was wir beim Bruhat-Tits-Baum nicht erreichen würden; dieser ist einfach zu groß). Dieser Quotientengraph hängt eng mit der Kurve $\Omega(G)/G$ zusammen und wird später noch wertvolle Informationen zur Bestimmung von Mumford-Origamis liefern.

Bemerkung 3.29 Zu jeder Schottkygruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{PGL}_2(k)$ gibt es einen lokal endlichen Baum $\mathcal{B}(\Gamma)$, dessen Ecken Kreisscheiben aus \mathcal{K} sind, so dass Γ frei auf $\mathcal{B}(\Gamma)$ operiert.

Beweis: Zu Γ gibt es nach Bemerkung 3.18 einen Fundamentalbereich der Form

$$\mathcal{F} = \mathbb{P}(k) \setminus \bigcup_{i=1}^{2g} K_i$$

Wir setzen zunächst als Eckenmenge

$$E := \{M((K_i)_{i \in I}) : \emptyset \neq I \subseteq \{1, \dots, 2g\}\}$$

und als Kantenmenge

$$K := \{(K_1, K_2) : K_1, K_2 \in E, K_1 \text{ maximal mit } K_1 \subsetneq K_2\}$$

Der dadurch definierte Graph $\mathcal{F}(\Gamma)$ ist zusammenhängend, denn der Kreis $M(K_1, \dots, K_{2g}) \in E$ enthält alle anderen Kreise. Außerdem enthält $\mathcal{F}(\Gamma)$ keinen Zyklus: Es gäbe sonst Kreise $K, K_1, K_2 \in E$, so dass K in K_1 und K_2 aber weder K_1 in K_2 noch K_2 in K_1 enthalten wäre. Dies widerspräche Korollar 3.14. Damit ist $\mathcal{F}(\Gamma)$ ein endlicher Baum mit den Blättern⁸ K_i . Wir setzen nun

$$\mathcal{B}(\Gamma) := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\mathcal{F}(\Gamma))$$

Da die Erzeuger von Γ jeweils Blätter von $\mathcal{F}(\Gamma)$ auf Blätter von $\mathcal{F}(\Gamma)$ abbilden, ist $\mathcal{B}(\Gamma)$ wieder zusammenhängend. Da Γ frei ist, gibt es von jedem Bild von $\mathcal{F}(\Gamma)$ genau einen Weg nach $\mathcal{F}(\Gamma)$, daher ist auch $\mathcal{B}(\Gamma)$ wieder zykliefrei.

Also ist $\mathcal{B}(\Gamma)$ ein Baum, auf dem Γ mit Fundamentalbereich $\mathcal{F}(\Gamma)$ operiert. \square

Bemerkung 3.30 Die Enden von $\mathcal{B}(\Gamma)$ entsprechen bijektiv $\mathcal{L}(\Gamma)$.

Beweis: Sei E ein Ende von $\mathcal{B}(\Gamma)$ und $S = \{K_1, K_2, \dots\}$ ein Strahl in E . Dann gibt es eine Folge $(\gamma_i) \subset \Gamma$, so dass $K_i \in \gamma_i(\mathcal{F}(\Gamma))$ ist. Da Γ frei ist und $\mathcal{F}(\Gamma)$ nur endlich viele Kreise enthält, gibt es eine Teilfolge der γ_i , deren Elemente paarweise verschieden sind und für die es ein $K' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ mit $\gamma_i(K') = K_i$ gibt. Falls $\mathrm{rad}(K_i) \rightarrow 0$, so gibt es einen Punkt $x = \bigcap K_i$, der dann Limespunkt von Γ ist (wähle dazu $y \in K'$, dann ist $x = \lim \gamma_i(y)$); das funktioniert genauso wie im Beweis von Satz 3.17). Falls $\mathrm{rad}(K_i) \rightarrow \infty$, so ist $\infty \in \mathcal{L}(\Gamma)$.

Wie in Bemerkung 3.28 hängt der so bestimmte Limespunkt nicht von der Wahl des Repräsentanten von E ab. Auch die Injektivität zeigt man genauso. Außerdem gibt es zu jedem Limespunkt x eine Folge $(\gamma_i) \subset \Gamma$ wie oben beschrieben, zu $K \in \mathcal{F}(\Gamma)$ können wir also einen Strahl entlang der Kreisscheiben $\gamma_i(K)$ konstruieren, die alle x enthalten. Damit haben wir auch hier die Surjektivität. \square

Bemerkung 3.31 Sei $G \subset \mathrm{PGL}_2(k)$ eine diskontinuierliche Gruppe und Γ eine Schottkygruppe, die Normalteiler von endlichem Index in G ist. Dann gibt es einen lokal-endlichen Baum $\mathcal{B}(G)$, dessen Ecken Kreisscheiben aus \mathcal{K} sind, so dass G auf $\mathcal{B}(G)$ operiert. Insbesondere operiert dann auch Γ auf $\mathcal{B}(G)$.

⁸Ein Blatt in einem Baum \mathcal{B} ist eine Ecke in \mathcal{B} vom Grad 1.

Beweis: Wir skizzieren hier nur, wie man $\mathcal{B}(G)$ erhält. Ein ausführlicher Beweis (wenn auch mit anderen Methoden) findet sich in [8], Satz 1.

Falls G nicht bereits auf $\mathcal{B}(\Gamma)$ operiert, so gibt es eine Ecke K in $\mathcal{F}(\Gamma)$, die von einem Nebenklassenvertreter $g \in G$ von G/Γ nicht auf eine Ecke von $\mathcal{B}(\Gamma)$ abgebildet wird. Nun bilden wir $g(K)$ mit einer Folge $(\gamma_i) \subset \Gamma$ so ab, dass $\text{rad}(\gamma_i(g(K))) \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$. Dadurch wird wie im Beweis von Bemerkung 3.30 ein Limespunkt x von G definiert. Nach Bemerkung 2.14 ist $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(\Gamma)$, also ist x Limespunkt von Γ . Nach Bemerkung 3.30 entspricht x damit einem Ende von $\mathcal{B}(\Gamma)$. Es gibt also ein i , so dass $\gamma_i(g(K))$ auf einer Kante von $\mathcal{B}(\Gamma)$ liegt. Da $\mathcal{B}(\Gamma)$ invariant unter Γ ist, liegt dann bereits $g(K)$ auf einer Kante von $\mathcal{B}(\Gamma)$, das heißt es gibt eine Kante $(K_1, K_2) \in \mathcal{B}(\Gamma)$ mit $K_1 \subseteq g(K) \subseteq K_2$. Diese Kante teilen wir dann in zwei Hälften $(K_1, g(K))$ und $(g(K), K_2)$ und übertragen das auf die entsprechende Kante in $\mathcal{F}(\Gamma)$. Die ganze Prozedur wiederholen wir für alle Nebenklassenvertreter. Wir erweitern so $\mathcal{F}(\Gamma)$ zu $\mathcal{F}_G(\Gamma)$ und setzen dann wieder

$$\mathcal{B}(G) := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\mathcal{F}_G(\Gamma))$$

Der so konstruierte Baum unterscheidet sich von $\mathcal{B}(\Gamma)$ nur dadurch, dass einige Kanten feiner unterteilt wurden. Insbesondere sind die Enden von $\mathcal{B}(\Gamma)$ und $\mathcal{B}(G)$ gleich. Dies passt zu Bemerkung 2.14, in der wir festgestellt hatten, dass $\mathcal{L}(\Gamma) = \mathcal{L}(G)$ gilt. \square

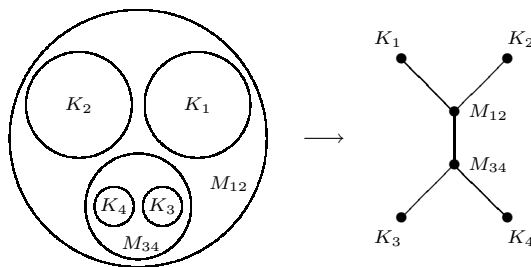
Beispiel 3.32 Seien $k := \mathbb{Q}_p$ und

$$\begin{aligned} K_1 &:= K^+(1, p^{-1}), & K_2 &:= K^+(-1, p^{-1}), \\ K_3 &:= K^+(p, p^{-2}), & K_4 &:= K^+(-p, p^{-2}) \end{aligned}$$

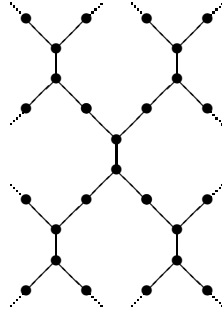
Wir finden nun nach Satz 3.17 Elemente $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{PGL}_2(k)$ mit $\gamma_1(K_1) = K_3$ und $\gamma_2(K_2) = K_4$, so dass $\mathcal{F} := \mathbb{P}(k) \setminus (K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4)$ Fundamentalbereich für die Schottkygruppe $\Gamma := \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ ist. Setzen wir $M_{ij} := M(K_i, K_j)$, so gilt

$$M_{34} = K^+(0, p^{-1}), \quad M_{12} = M_{13} = M_{14} = M_{23} = M_{24} = K^+(1, 1)$$

Damit erhalten wir den Fundamentalbereich $\mathcal{F}(\Gamma)$:



Daraus wird dann der Baum $\mathcal{B}(\Gamma)$:



3.5 Quotientengraphen

Definition 3.33 Sei $G \subseteq \text{PGL}_2(k)$ eine diskontinuierliche Gruppe. Da G auf $\mathcal{B}(G)$ operiert, können wir den *Quotientengraphen*

$$\mathcal{G}(G) := \mathcal{B}(G)/G$$

definieren. Ist G Schottkygruppe, so entsteht dieser aus $\mathcal{F}(G)$ durch Identifikation von Blättern, die von hyperbolischen Elementen aus G aufeinander abgebildet werden (wie in Satz 3.17).

Zu einer Ecke $K \in \mathcal{B}(G)$ heißt die Gruppe $G_K := \{g \in G : g(K) = K\}$ der *Stabilisator* von K unter der Aktion von G . Ist $e = (K, K')$ eine Kante in $\mathcal{B}(G)$, so ist $G_e = G_K \cap G_{K'}$ der Stabilisator von e .

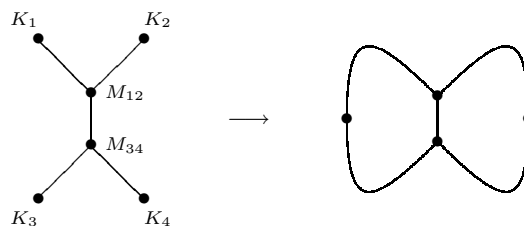
Alle Stabilisatoren von Ecken aus der G -Bahn von K sind konjugiert zu G_K , also isomorph. Man kann somit jeder Ecke K des Quotientengraphen $\mathcal{G}(G)$ deren Stabilisatorgruppe G_K (bis auf Isomorphie) zuordnen. Das gleiche funktioniert auch für die Kanten von $\mathcal{G}(G)$. Der Quotientengraph $\mathcal{G}(G)$ wird so zu einem Graphen von Gruppen.

Beispiel 3.34 In Beispiel 3.32 haben wir die Kreise

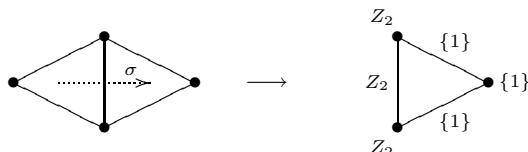
$$\begin{aligned} K_1 &:= K^+(1, p^{-1}), & K_2 &:= K^+(-1, p^{-1}), \\ K_3 &:= K^+(p, p^{-2}), & K_4 &:= K^+(-p, p^{-2}) \end{aligned}$$

in \mathbb{Q}_p betrachtet. Wir hatten dort den Baum der von den hyperbolischen Elementen $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{PGL}_2(k)$ mit $\gamma_1(K_1) = K_3$ und $\gamma_2(K_2) = K_4$ erzeugten Schottkygruppe Γ konstruiert.

Aus $\mathcal{F}(\Gamma)$ erhalten wir den Quotientengraphen $\mathcal{G}(\Gamma)$ durch Verkleben von K_1 mit K_3 und K_2 mit K_4 :



Sei nun ohne Einschränkung $\gamma_2 : z \mapsto -\gamma_1(-z)$. Wir setzen $\sigma : z \mapsto -z$ und $G := \langle \gamma_1, \gamma_2, \sigma \rangle$. Dann ist Γ ein Normalteiler vom Index 2 in G , da $\sigma\gamma_1\sigma = \gamma_2$ ist. Es gilt $\sigma(K_1) = K_2$ und $\sigma(K_3) = K_4$. Die beiden Kreise M_{12} und M_{34} in $\mathcal{F}(\Gamma)$ werden von σ fixiert, ihr Stabilisator ist damit jeweils $\langle \sigma \rangle \cong Z_2$. Wir können $\mathcal{B}(G) = \mathcal{B}(\Gamma)$ verwenden (ohne weitere Ecken hinzuzufügen) und erhalten aus $\mathcal{G}(\Gamma)$ durch Verkleben von K_1 mit K_2 den Quotientengraphen $\mathcal{G}(G)$:



Bemerkung 3.35 Sei k algebraisch abgeschlossen. Dann enthält eine diskontinuierliche Untergruppe von $\mathrm{PGL}_2(k)$ keine parabolischen Elemente.

Beweis: Sei $p := \mathrm{char}(\bar{k})$, also $|p| < 1$ nach Bemerkung 3.4. Angenommen $\alpha \in G$ wäre parabolisch, ohne Einschränkung $\alpha : z \mapsto z + a$ mit $a \in k$. Für $\alpha_i := \alpha^{p^i}$ gilt dann $\alpha_i(z) = z + ap^i$.

Wegen $|p^i| \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$ gilt $\alpha_i \rightarrow \mathrm{id}$. Daher konvergiert $\alpha_i(x)$ für alle $x \in \mathbb{P}(k)$ gegen x . Damit ist $\mathcal{L}(G) = \mathbb{P}(k)$, also G nicht diskontinuierlich. \square

Bemerkung 3.36 Sei k algebraisch abgeschlossen und $G \subset \mathrm{PGL}_2(k)$ eine diskontinuierliche Gruppe. Dann ist jede Ecken- oder Kantengruppe von $\mathcal{G}(G)$ isomorph zu einer der Gruppen Z_n, D_n, T, O, I aus Satz 2.7.

Beweis: Angenommen es gibt einen Kreis $K \in \mathcal{K}$ mit unendlichem Stabilisator G_K . Dann ist G_K als Untergruppe von G diskontinuierlich, enthält also nach Satz 3.20 a) eine Schottkygruppe Γ als Normalteiler von endlichem Index. Diese ist nicht trivial, da sonst $[G_K : \Gamma] = \infty$ wäre. Also enthält Γ ein nichttriviales Element γ . Dieses hat unendliche Ordnung, ist also nach Bemerkung 2.18 nicht elliptisch und nach Bemerkung 3.35 nicht parabolisch, also hyperbolisch. Es gibt daher keinen Kreis, der von γ fixiert wird, im Widerspruch zu $\gamma \in \Gamma \subseteq G_K$.

Es folgt, dass alle Eckengruppen endlich sind. Dann muss jede Eckengruppe isomorph zu einer der möglichen endlichen Untergruppen von $\mathrm{PGL}_2(k)$ aus Satz 2.7 sein. Weiter muss eine Kantengruppe beide Ecken dieser Kante fixieren, also Untergruppe beider Eckengruppen sein. \square

3.6 Abstände

In diesem und dem folgenden Abschnitt werden wir Abstände und Achsen von Kreisscheiben definieren und damit einige Aussagen über diskontinuierliche Gruppen beweisen. Zum Teil kann man diese Aussagen auch bei Herrlich in [9] oder bei Kato in [10] nachlesen.

Erinnern wir uns an den Bruhat-Tits-Baum von \mathbb{Q}_p aus Beispiel 3.25. Für beliebiges $x \in k$ und $a, b \in \mathbb{Z}$ seien $K_a := K^+(x, p^a)$ und $K_b := K^+(x, p^b)$. Der Abstand dieser beiden Ecken in \mathcal{B} ist dann gerade $|a - b|$. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 3.37 Seien $K_1 \subseteq K_2 \in \mathcal{K}$. Dann heißt

$$\text{dist}(K_1, K_2) := \log \frac{\text{rad}(K_2)}{\text{rad}(K_1)}$$

der *Abstand* der Kreise K_1 und K_2 .

Lemma 3.38 Seien $K_1 \subseteq K_2 \in \mathcal{K}$ und $\alpha \in \text{PGL}_2(k)$.

Dann gilt $\text{dist}(\alpha(K_1), \alpha(K_2)) = \text{dist}(K_1, K_2)$, falls dies definiert ist.

Beweis: Wir betrachten $K_1 := K^+(x, r_1)$ und $K_2 := K^+(x, r_2)$ mit $r_1 \leq r_2$.

Hat α die Form $z \mapsto az + b$ mit $a, b \in k$, so gilt

$$\alpha(K_1) = K^+(ax + b, |a|r_1) \subseteq K^+(ax + b, |a|r_2) = \alpha(K_2)$$

Damit ist $\text{dist}(\alpha(K_1), \alpha(K_2)) = \text{dist}(K_1, K_2)$ immer definiert.

Für allgemeines α genügt es nun, die Behauptung nur noch für $\sigma : z \mapsto \frac{1}{z}$ zu überprüfen, denn wir können α wie in Bemerkung 3.11 als Komposition $\alpha_1 \sigma \alpha_2$ mit α_1, α_2 wie oben schreiben (man beachte hierbei, dass $\text{dist}(\alpha(K_1), \alpha(K_2))$ genau dann definiert ist, wenn $\text{dist}(\sigma(\alpha_1(K_1)), \sigma(\alpha_1(K_2)))$ definiert ist).

Für $|x| > 0$ sei $y := \frac{1}{x}$. Wir betrachten nun $\sigma(K_1)$ und $\sigma(K_2)$, unterscheiden vier Fälle, und wenden jeweils Lemma 3.10 an:

$$|x| \leq r_1 \leq r_2 \Rightarrow \sigma(K_2) = K^+(0, \frac{1}{r_2}) \subseteq K^+(0, \frac{1}{r_1}) = \sigma(K_1),$$

$$\text{also } \text{dist}(\sigma(K_2), \sigma(K_1)) = \log \frac{\frac{1}{r_1}}{\frac{1}{r_2}} = \log \frac{r_2}{r_1} = \text{dist}(K_1, K_2).$$

$$r_1 < |x| < r_2 \Rightarrow \sigma(K_1) = K^+(y, |y^2|r_1) \text{ und } \sigma(K_2) = K^+(0, \frac{1}{r_2}).$$

Wegen $|y| = |\frac{1}{x}| > \frac{1}{r_2}$ gilt $y \notin \sigma(K_2)$, also $\sigma(K_1) \cap \sigma(K_2) = \emptyset$.

Dann ist $\text{dist}(\sigma(K_1), \sigma(K_2))$ nicht definiert, also nichts zu prüfen.

$$r_1 < |x| = r_2 \Rightarrow \sigma(K_1) = K^+(y, |y^2|r_1) \text{ und } \sigma(K_2) = K^+(0, \frac{1}{r_2}).$$

Wegen $|y| = |\frac{1}{x}| = \frac{1}{r_2}$ gilt $y \in \sigma(K_2)$, also $\sigma(K_2) = K^+(y, \frac{1}{r_2})$.

Mit $|y^2|r_1 = \frac{r_1}{r_2^2} < \frac{1}{r_2}$ sehen wir $\sigma(K_1) \subseteq \sigma(K_2)$, also gilt

$$\text{dist}(\sigma(K_1), \sigma(K_2)) = \log \frac{\frac{1}{\frac{r_1}{r_2^2}}}{\frac{1}{r_2}} = \log \frac{r_2}{r_1} = \text{dist}(K_1, K_2).$$

$$r_1 \leq r_2 < |x| \Rightarrow \sigma(K_1) = K^+(y, |y^2|r_1) \subseteq K^+(y, |y^2|r_2) = \sigma(K_2),$$

$$\text{also } \text{dist}(\sigma(K_1), \sigma(K_2)) = \text{dist}(K_1, K_2). \quad \square$$

Bemerkung 3.39 Die Abbildung dist lässt sich so auf ganz \mathcal{K}^2 fortsetzen, dass sie invariant unter der Operation von $\text{PGL}_2(k)$ ist.

Beweis: Seien $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$. Nach Bemerkung 3.16 gibt es ein $\alpha \in \text{PGL}_2(k)$, so dass $\alpha(K_1) \subseteq \alpha(K_2)$ ist. Wir definieren dann

$$\text{dist}(K_1, K_2) := \text{dist}(\alpha(K_1), \alpha(K_2))$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert: Gibt es $\alpha_i \in \mathrm{PGL}_2(k)$ mit $\alpha_i(K_1) \subseteq \alpha_i(K_2)$ für $i \in \{1, 2\}$, so gilt nach Lemma 3.38

$$\mathrm{dist}(\alpha_1(K_1), \alpha_1(K_2)) = \mathrm{dist}(\alpha_2\alpha_1^{-1}(\alpha_1(K_1)), \alpha_2\alpha_1^{-1}(\alpha_1(K_2)))$$

Damit ist die Abbildung dist offensichtlich auch invariant unter $\mathrm{PGL}_2(k)$. \square

Bemerkung 3.40 Seien $K_1, K_2, K_3 \in \mathcal{K}$ mit $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3$. Dann gilt

$$\mathrm{dist}(K_1, K_3) = \mathrm{dist}(K_1, K_2) + \mathrm{dist}(K_2, K_3)$$

Beweis: Die Behauptung folgt wegen

$$\log \frac{\mathrm{rad} K_2}{\mathrm{rad} K_1} + \log \frac{\mathrm{rad} K_3}{\mathrm{rad} K_2} = \log \frac{\mathrm{rad} K_3}{\mathrm{rad} K_1} \quad \square$$

Korollar 3.41 Seien $K_1, K_2 \in K$. Dann gilt

$$\mathrm{dist}(K_1, K_2) = \mathrm{dist}(K_1, M(K_1, K_2)) + \mathrm{dist}(M(K_1, K_2), K_2)$$

Beweis: Nach Bemerkung 3.16 gibt es ein $\alpha \in \mathrm{PGL}_2(k)$ mit

$$\alpha(K_1) \subseteq \alpha(M(K_1, K_2)) \subseteq \alpha(K_2)$$

Da dist invariant unter α ist, folgt die Behauptung aus Bemerkung 3.40. \square

Bemerkung 3.42 Die Abbildung dist definiert eine Metrik auf \mathcal{K} .

Beweis: Seien $K_1, K_2, K_3 \in K$, ohne Einschränkung $K_1 \supseteq K_2$. Es gilt

$$\mathrm{dist}(K_1, K_2) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rad}(K_1) = \mathrm{rad}(K_2) \Leftrightarrow K_1 = K_2$$

Sei $M := M(K_2, K_3) \supseteq K_2$. Falls $M \supseteq K_1$, so gilt $\mathrm{dist}(K_2, M) \geq \mathrm{dist}(K_1, M)$ und $M = M(K_1, K_3)$. Ansonsten gilt $K_1 \supseteq M$ und $\mathrm{dist}(K_1, K_2) \geq \mathrm{dist}(K_1, M)$. Mit Bemerkung 3.40 und Korollar 3.41 folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(K_1, K_2) + \mathrm{dist}(K_2, K_3) &= \mathrm{dist}(K_1, K_2) + \mathrm{dist}(K_2, M) + \mathrm{dist}(M, K_3) \\ &\geq \mathrm{dist}(K_1, M) + \mathrm{dist}(M, K_3) = \mathrm{dist}(K_1, K_3) \end{aligned} \quad \square$$

3.7 Achsen

Für Körper, für die wir den Bruhat-Tits-Baum \mathcal{B} in Bemerkung 3.26 definiert haben, wissen wir schon, was Achsen in diesem Baum sind. Eine Achse ist eindeutig bestimmt durch die beiden Enden, die zu dieser Achse gehören. Die Enden lassen sich bijektiv auf die Punkte in $\mathbb{P}(k)$ abbilden.

Sei nun k algebraisch abgeschlossen. Wir müssen Achsen in \mathcal{K} also jetzt ohne Verwendung des Bruhat-Tits-Baums definieren:

Definition 3.43 Eine Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$ heißt *Achse*, wenn es ein $\alpha \in \mathrm{PGL}_2(k)$ gibt, so dass gilt:

$$\alpha(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_\infty^0 := \{K^+(0, r) : r \in \mathbb{R}_+\}$$

Bemerkung 3.44 Sei $\mathcal{A} \subset K$ eine Achse, und $\alpha \in \text{PGL}_2(k)$ mit $\alpha(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_\infty^0$. Dann gilt:

- Die Menge $\{\alpha^{-1}(0), \alpha^{-1}(\infty)\}$ hängt nicht von der Wahl von α ab. Die Punkte $\alpha^{-1}(0)$ und $\alpha^{-1}(\infty)$ heißen *Endpunkte* von \mathcal{A} .
- Für $\beta \in \text{PGL}_2(k)$ sind die Endpunkte von $\beta(\mathcal{A})$ die Bilder der Endpunkte von \mathcal{A} unter β .
- Eine Achse ist durch ihre Endpunkte eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir führen die Beweise für b) und c) ohne Einschränkung für $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\infty^0$.

- Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{PGL}_2(k)$ mit $\alpha_1(\mathcal{A}) = \alpha_2(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_\infty^0$. Dann operiert $\alpha := \alpha_1 \alpha_2^{-1}$ auf \mathcal{A}_∞^0 . Es gilt

$$\{0\} = \bigcap_{K \in \mathcal{A}_\infty^0} K \quad \text{und} \quad \{\infty\} = \bigcap_{K \in \mathcal{A}_\infty^0} (\mathbb{P}(k) \setminus K)$$

Also ist $\alpha(\{0, \infty\}) = \{0, \infty\}$. Es folgt $\alpha_2^{-1}(\{0, \infty\}) = \alpha_1^{-1}(\{0, \infty\})$.

- gilt nach Definition der Endpunkte für $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\infty^0$.
- Sei $\alpha \in \text{PGL}_2(k)$ mit Fixpunkten 0 und ∞ . Dann gibt es ein $q \in K$ mit $\alpha : z \mapsto qz$. Sei $r \in \mathbb{R}_+$. Nach Lemma 3.10 gilt: $\alpha(K^+(0, r)) = K^+(0, |q|r)$. Also ist $\alpha(\mathcal{A}_\infty^0) = \mathcal{A}_\infty^0$. \square

Falls ein Element $\alpha \in \text{PGL}_2(k)$ nicht parabolisch ist, so hat es zwei Fixpunkte. Diese beiden Fixpunkte definieren eine Achse $\mathcal{A}(\alpha)$ in \mathcal{K} , die genau diese Punkte als Endpunkte hat:

Bemerkung 3.45 Sei $\alpha \in \text{PGL}_2(k)$. Dann gilt:

- α ist genau dann hyperbolisch, wenn es eine Achse $\mathcal{A}(\alpha)$ gibt, auf der α fixpunktfrei operiert.
- α ist genau dann elliptisch, wenn es eine Achse $\mathcal{A}(\alpha)$ gibt, so dass α jeden Kreis in $\mathcal{A}(\alpha)$ fixiert.
- Die Endpunkte einer solchen Achse $\mathcal{A}(\alpha)$ sind die Fixpunkte von α .
- $\mathcal{A}(\alpha)$ ist durch die Fixpunkte von α eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir beweisen zunächst Teile a) und b).

„ \Rightarrow “ Sei α elliptisch oder hyperbolisch, ohne Einschränkung $\alpha : z \mapsto qz$ mit $q \in k$. Sei $r \in \mathbb{R}_+$. Nach Lemma 3.10 gilt $\alpha(K^+(0, r)) = K^+(0, |q|r)$. Also operiert α auf der Achse \mathcal{A}_∞^0 . Falls α elliptisch ist, so ist $|q| = 1$, also wird jeder Kreis fixiert. Ansonsten ist $|q| \neq 1$ und es wird kein Kreis fixiert.

„ \Leftarrow “ Nun operiere α ohne Einschränkung auf \mathcal{A}_∞^0 . Es gilt $\alpha(\mathcal{A}_\infty^0) = \mathcal{A}_\infty^0$, also $\alpha(\{0, \infty\}) = \{0, \infty\}$ nach Bemerkung 3.44.

Angenommen $\alpha(0) = \infty$ und $\alpha(\infty) = 0$. Dann gibt es ein $q \in k$ mit $\alpha : z \mapsto \frac{q}{z}$. Damit ist $\alpha(K^+(0, r)) = \alpha(K^+(0, \frac{|q|}{r}))$. Von α wird also genau der Kreis mit $r = \sqrt{|q|}$ fixiert, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Somit sind 0 und ∞ Fixpunkte von α , es ist also $\alpha : z \mapsto qz$ mit $q \in k$ und wir sind in der gleichen Situation wie im ersten Teil.

Die Teile c) und d) sind nun einfach: Die Endpunkte von \mathcal{A}_∞^0 sind 0 und ∞ , also gerade die Fixpunkte von α . Dadurch ist $\mathcal{A}(\alpha)$ nach Bemerkung 3.44 eindeutig bestimmt. \square

Als Beispiel berechnen wir nun die Achse einer Spiegelung in einer Diedergruppe:

Bemerkung 3.46 Sei $D \subset \text{PGL}_2(k)$ eine Diedergruppe, δ eine Drehung in D und σ eine Spiegelung in D . Für $\text{char}(\bar{k}) > 2$ schneiden sich die Achsen von δ und σ in genau einem Kreis.

Beweis: Nach Bemerkung 2.8 sind ohne Einschränkung $\{0, \infty\}$ die Fixpunkte von δ und $\{1, -1\}$ die von σ . Für die Möbiustransformation

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt $\tau(0) = 1$ und $\tau(\infty) = -1$. Also bildet τ die Achse \mathcal{A}_∞^0 auf die Achse von σ ab. Mit Bemerkung 3.11 und Lemma 3.10 rechnet man nach: Ein Kreis $K^+(0, r) \in \mathcal{A}_\infty^0$ wird von τ für $r < 1$ auf den Kreis $K^+(-1, r)$ und für $r \geq 1$ auf den Kreis $\mathbb{P}(k) \setminus K^-(1, \frac{1}{r})$, also in \mathcal{K} auf $K^+(1, \frac{1}{r})$ abgebildet. Damit gilt:

$$\mathcal{A}(\sigma) = \tau(\mathcal{A}_\infty^0) = \{K^+(-1, r) : r < 1\} \cup \{K^+(1, r) : r \leq 1\}$$

Wegen $|1| = |-1| = 1$ ist 0 für $r < 1$ weder in $K^+(-1, r)$ noch in $K^+(1, r)$ enthalten. Also ist $K^+(1, 1) = K^+(0, 1)$ der einzige Kreis in $\mathcal{A}(\sigma)$, der die 0 enthält. Damit ist dies auch der einzige Kreis, der in $\mathcal{A}(\delta) = \mathcal{A}_\infty^0$ enthalten ist. \square

Wir wollen jetzt genauer verstehen, wie hyperbolische und elliptische Elemente auf \mathcal{K} operieren. In Bemerkung 3.45 haben wir schon gesehen, dass die Achse eines Elements dabei eine große Rolle spielt. Befassen wir uns zunächst mit einem hyperbolischen Element $\gamma \in \text{PGL}_2(k)$. Dieses operiert fixpunktfrei auf $\mathcal{A}(\gamma)$. Wir werden sehen, dass dabei für alle $K \in \mathcal{A}(\gamma)$ der Abstand zwischen K und $\gamma(K)$ konstant ist. Das heißt: Alle Kreise in $\mathcal{A}(\gamma)$ werden gleichmäßig entlang der Achse verschoben.

Bemerkung 3.47 Sei $\gamma \in \text{PGL}_2(k)$ konjugiert zu $z \mapsto qz$ mit $|q| > 1$ und $K_1, K_2 \in \mathcal{A}(\gamma)$. Dann gilt

$$\text{dist}(K_1, K_2) = \log |q| \Leftrightarrow K_1 = \gamma(K_2) \text{ oder } K_2 = \gamma(K_1)$$

Beweis: Ohne Einschränkung sei $\gamma : z \mapsto qz$, also $\mathcal{A}(\gamma) = \mathcal{A}_\infty^0$. Dann können wir K_1 und K_2 schreiben als $K_1 = K^+(0, r_1)$ und $K_2 = K^+(0, r_2)$. Damit gilt $\text{dist}(K_1, K_2) \in \{\log \frac{r_1}{r_2}, \log \frac{r_2}{r_1}\}$, also

$$\begin{aligned} \text{dist}(K_1, K_2) = \log |q| &\Leftrightarrow r_1 = r_2 |q| \text{ oder } r_2 = r_1 |q| \\ &\Leftrightarrow K_1 = \gamma(K_2) \text{ oder } K_2 = \gamma(K_1) \end{aligned} \quad \square$$

Nun wollen wir uns mit elliptischen Elementen beschäftigen. Wir wissen bereits, dass die Achse $\mathcal{A}(\alpha)$ eines elliptischen Elements $\alpha \in \mathrm{PGL}_2(k)$ von α festgehalten wird. Wir werden sehen, dass α manchmal nicht nur die Achse fixiert, sondern auch alle Kreise, die nicht zu weit von der Achse entfernt sind. Dazu müssen wir zunächst den Abstand zwischen einer Achse und einem Kreis ausrechnen können:

Bemerkung 3.48 Sei $K = K^+(x, r) \in \mathcal{K}$ ein Kreis. Dann gilt:

$$\mathrm{dist}(K, \mathcal{A}_\infty^0) = \mathrm{dist}(K, K^+(0, |x|))$$

Beweis: Sei $K' \in \mathcal{A}_\infty^0$ und $K^* := K^+(0, |x|)$. Wir zeigen

$$\mathrm{dist}(K, K') = \mathrm{dist}(K, K^*) + \mathrm{dist}(K^*, K') \geq \mathrm{dist}(K, K^*) \quad (*)$$

Ist $\mathrm{rad}(K') \leq |x|$, so ist $K^* = M(K', K)$, also folgt (*) aus Korollar 3.41. Ist dagegen $\mathrm{rad}(K') \geq |x|$, so gilt $K \subseteq K^* \subseteq K'$, also folgt (*) aus Bemerkung 3.40. \square

Bemerkung 3.49 Sei $\alpha \in \mathrm{PGL}_2(k)$ elliptisch mit $\mathrm{ord}(\alpha) = n < \infty$ und p die Charakteristik des Restklassenkörpers \bar{k} . Dann ist $K \in \mathcal{K}$ genau dann Fixpunkt von α , wenn gilt:

$$\mathrm{dist}(K, \mathcal{A}(\alpha)) \leq \begin{cases} |p|^{1/p^{\nu-1}(p-1)} & \text{falls } n = p^\nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Ohne Einschränkung ist $\alpha : z \mapsto \zeta z$, wobei ζ eine primitive n -te Einheitswurzel ist. Ein Kreis $K := K^+(x, r)$ mit $x \neq 0$ wird durch α auf den Kreis $\alpha(K) = K^+(\zeta x, |\zeta|r)$ abgebildet. Wegen $|\zeta| = 1$ gilt

$$K = \alpha(K) \Leftrightarrow \zeta x \in K \Leftrightarrow |x - \zeta x| \leq r \Leftrightarrow |1 - \zeta| \leq \frac{r}{|x|}$$

Falls $0 \in K$ ist, so ist $K \in \mathcal{A}(\alpha)$. Ansonsten gilt $K \subseteq K^+(0, |x|)$, also

$$\mathrm{dist}(K, \mathcal{A}(\alpha)) = \mathrm{dist}(K, K^+(0, |x|)) = \log \frac{|x|}{r}$$

Also gilt

$$K = \alpha(K) \Leftrightarrow \mathrm{dist}(K, \mathcal{A}(\alpha)) = \log \frac{|x|}{r} \leq \log |1 - \zeta|^{-1}$$

Daraus folgt die Behauptung mit Bemerkung 3.7. \square

Bemerkung 3.50 Sei G eine diskontinuierliche Untergruppe von $\mathrm{PGL}_2(k)$ und p die Charakteristik von \bar{k} . Dann gilt:

- Für $p > 3$ ist jede Kantengruppe von $\mathcal{G}(G)$ isomorph zu Z_n oder zu D_{p^n} für ein $n \in \mathbb{N}$.
- Ist für $p > 5$ eine Kantengruppe eine Diedergruppe, so sind beide zugehörigen Eckengruppen auch Diedergruppen.

Beweis:

- a) Nach Bemerkung 3.36 kommen als Kantengruppen nur die Gruppen Z_n , D_n , T , O und I in Frage.

Sei $p > 3$. Ist n keine Potenz von p , so hat D_n eine Untergruppe D_m mit m teilerfremd zu p . Kein Element aus D_m hat als Ordnung eine Potenz von p . Also fixiert jedes Element aus D_m nach Bemerkung 3.49 nur seine Achse. Da sich die Achsen nach Bemerkung 3.46 nur in einer Ecke schneiden, fixiert D_m nur diese eine Ecke. Sie kann daher nicht Untergruppe einer Kantengruppe sein (denn diese muss mindestens zwei Ecken fixieren).

Die Gruppen T, O und I enthalten jeweils eine D_3 , können für $p > 3$ also nicht als Kantengruppen vorkommen.

- b) Die Kantengruppe ist nach a) isomorph zu D_{p^n} , enthält also ein Element von Ordnung $p > 5$. Sie ist Untergruppe beider Eckengruppen. Diese sind nach Bemerkung 3.36 isomorph zu Z_n, D_n, T, O oder I . Da es in T, O und I keine Elemente von größerer Ordnung als 5 gibt und Z_n keine Diedergruppe enthält, müssen beide Eckengruppen Diedergruppen sein. \square

In den folgenden Bemerkungen interessieren wir uns für die Frage, unter welchen Bedingungen zwei Achsen gleich sind, und was das für Auswirkungen hat:

Bemerkung 3.51 Sei G eine diskontinuierliche Untergruppe von $\mathrm{PGL}_2(k)$. Seien $\alpha, \beta \in G$. Dann gilt: Falls α und β einen gemeinsamen Fixpunkt haben, so stimmen ihre Achsen überein.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass α und β zwei gemeinsame Fixpunkte haben. Denn dann ist $\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}(\beta)$ die durch diese Endpunkte eindeutig bestimmte Achse (nach Bemerkung 3.45).

Angenommen α und β haben genau einen gemeinsamen Fixpunkt. Ohne Einschränkung seien 0 und ∞ die Fixpunkte von α , und ∞ ebenfalls Fixpunkt von β . Es gibt dann $a, b, z \in k \setminus \{0\}$ mit $z \neq 1$ und

$$\alpha = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & b(z-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ parabolisch. Nach Bemerkung 3.35 steht dies im Widerspruch dazu, dass G diskontinuierlich ist. \square

Bemerkung 3.52 Sei G eine diskontinuierliche Untergruppe von $\mathrm{PGL}_2(k)$. Seien x und y die Fixpunkte eines Elements $\alpha \in G$ und $\gamma \in G$ hyperbolisch.

Dann gilt $\gamma(x) \neq y$.

Beweis: Angenommen es wäre $\gamma(x) = y$.

$\gamma^{-1}\alpha\gamma$ hat x als Fixpunkt. Also muss nach Bemerkung 3.51 auch y Fixpunkt von $\gamma^{-1}\alpha\gamma$ sein. Dann ist $\gamma(y) = \alpha\gamma(y)$, also $\gamma(y)$ Fixpunkt von α . Es gilt somit $\gamma(y) = x$. Daher werden x und y von γ vertauscht, beide sind also Fixpunkte von γ^2 . Die Fixpunkte von γ sind jedoch ebenfalls Fixpunkte von γ^2 . Damit muss $\gamma^2 = \mathrm{id}$ sein, γ kann also nicht hyperbolisch sein. \square

Bemerkung 3.53 Sei G eine diskontinuierliche Untergruppe von $\mathrm{PGL}_2(k)$. Seien $\alpha, \beta \in G$ elliptisch mit gleichen Achsen. Dann ist $\langle \alpha, \beta \rangle$ zyklisch.

Beweis: Ohne Einschränkung seien 0 und ∞ die Fixpunkte von α und β , also $\alpha : z \mapsto az$ und $\beta : z \mapsto bz$, wobei a und b primitive Einheitswurzeln sind. $\langle a, b \rangle$ ist als endliche Untergruppe von k^\times zyklisch, hat also einen Erzeuger c . Setze nun $\gamma : z \mapsto cz$. Aus $\langle c \rangle = \langle a, b \rangle$ folgt $\langle \gamma \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$. \square

Zum Schluss dieses Kapitels werden wir noch zwei sehr nützliche Kriterien für die Gleichheit zweier Achsen angeben:

Bemerkung 3.54 Seien $\alpha, \beta \in \mathrm{PGL}_2(k)$ hyperbolisch oder elliptisch.

Dann gilt:

$$\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}(\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta & \text{falls } \mathrm{ord}(\alpha) = \mathrm{ord}(\beta) = 2 \\ \alpha\beta = \beta\alpha & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Ohne Einschränkung seien 0 und ∞ die Fixpunkte von α .

„ \Rightarrow “ Es gilt $\alpha : z \mapsto az$ und $\beta : z \mapsto bz$ mit $a, b \in k$, also $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Falls $\mathrm{ord}(\alpha) = \mathrm{ord}(\beta) = 2$, so folgt $a = b = -1$, also $\alpha = \beta$.

„ \Leftarrow “ Für $\mathrm{ord}(\alpha) = \mathrm{ord}(\beta) = 2$ ist die Aussage klar. Ansonsten haben wir

$$\alpha = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \beta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d, q \in k$. Es gilt also

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} qa & qb \\ c & d \end{pmatrix} \text{ und } \beta\alpha = \begin{pmatrix} qa & b \\ qc & d \end{pmatrix}$$

Falls $a \neq 0$ oder $d \neq 0$, so muss $qb = b$ und $qc = c$ gelten. Wegen $q \neq 1$ folgt hieraus $b = c = 0$, also $\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}(\beta)$.

Falls $a = d = 0$, so ist $\mathrm{ord}(\beta) = 2$. Außerdem gilt $bc \neq 0$ und es muss $\frac{qb}{b} = \frac{c}{qc}$ gelten, also $q^2 = 1$. Daraus folgt $q = -1$, also auch $\mathrm{ord}(\alpha) = 2$. Der Fall $\mathrm{ord}(\alpha) = \mathrm{ord}(\beta) = 2$ wurde aber bereits behandelt. \square

Bemerkung 3.55 Sei $G \subset \mathrm{PGL}_2$ eine diskontinuierliche Gruppe, $\alpha \in G$ elliptisch und $\gamma \in G$ hyperbolisch. Dann gilt:

$$\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}(\gamma) \Leftrightarrow \mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}(\gamma\alpha\gamma^{-1})$$

Beweis: Sei $\beta := \gamma\alpha\gamma^{-1}$.

„ \Rightarrow “ Nach Bemerkung 3.54 ist $\gamma\alpha = \alpha\gamma$, also $\alpha = \gamma\alpha\gamma^{-1}$.

„ \Leftarrow “ Ist x gemeinsamer Fixpunkt von α und β , so folgt $\gamma(x) = \gamma\alpha(x) = \beta\gamma(x)$, also ist $\gamma(x)$ Fixpunkt von β . Nach Bemerkung 3.52 kann $\gamma(x)$ nicht der andere Fixpunkt von β sein, es folgt daher $\gamma(x) = x$, also ist x Fixpunkt von γ . \square

Kapitel 4

Galoissche Mumford-Origamis

4.1 Zwei Beispiele

Ab jetzt sei k ein vollständiger nichtarchimedisch bewerteter algebraisch abgeschlossener Körper, immer noch mit Charakteristik 0. Wir wollen nun galoissche Mumford-Origamis konstruieren. Dafür benötigen wir ein brauchbares Kriterium, um zu beweisen, dass eine Gruppe Schottkygruppe ist.

Bemerkung 4.1 Sei $q \in k$ mit $|q| < 1$ und $\Gamma := \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$, wobei γ_i für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ zu $z \mapsto qz$ konjugiert sei. Für die Fixpunkte x und y eines γ_i gelte $|x|, |y| \leq 1$ und $|x - y| = 1$, für die Fixpunkte x und y zweier verschiedener γ_i gelte $|x - y| > \sqrt{|q|}$. Dann gilt

- a) Γ ist Schottkygruppe.
- b) Sei $x \in k$. Falls für alle Fixpunkte a aller γ_i gilt $|x - a| > \sqrt{|q|}$, so folgt $x \notin \mathcal{L}(\Gamma)$.
- c) Auch $\gamma_1 : z \mapsto qz$ ist möglich, in diesem Fall können alle Bedingungen für den Fixpunkt ∞ von γ_1 gestrichen werden. Dafür muss dann in b) zusätzlich $|x| < \sqrt{|q^{-1}|}$ vorausgesetzt werden.

Beweis: Seien x_{i1} und x_{i2} die Fixpunkte von γ_i . Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, 2\}$ definieren wir dann

$$K_{ij} := K^+ \left(x_{ij}, \sqrt{|q|} \right)$$

Wegen $|x_{i1} - x_{i2}| = 1$ gilt $M(K_{i1}, K_{i2}) = K^+(0, 1)$. Mit Korollar 3.41 folgt

$$\begin{aligned} \text{dist}(K_{i1}, K_{i2}) &= \text{dist}(K_{i1}, K^+(0, 1)) + \text{dist}(K_{i2}, K^+(0, 1)) \\ &= 2 \log \sqrt{|q^{-1}|} = \log |q^{-1}| \end{aligned}$$

Mit Bemerkung 3.47 erhält man nun, dass K_{i1} und K_{i2} durch γ_i aufeinander abgebildet werden.

Alle Kreisscheiben K_{ij} sind paarweise disjunkt, denn je zwei Fixpunkte sind weiter als $\sqrt{|q|}$ voneinander entfernt. Damit folgen Behauptungen a) und b) aus Satz 3.17.

Falls $x_{11} = 0$ und $x_{12} = \infty$ ist, so setzen wir

$$K_{12} := \mathbb{P}(k) \setminus K^-(0, \sqrt{|q^{-1}|})$$

Damit ist ebenfalls

$$\text{dist}(K_{11}, K_{12}) = \log \frac{\sqrt{|q^{-1}|}}{\sqrt{|q|}} = \log |q^{-1}|$$

K_{12} ist wegen $\text{rad}(K_{12}) > 1$ disjunkt zu allen anderen Kreisscheiben, wir können also wieder Satz 3.17 anwenden. Daraus folgt Teil c). \square

Um zu zeigen, dass eine gegebene Überlagerung $\Omega/\Gamma \rightarrow \Omega/G$ ein Origami ist, müssen wir beweisen, dass Ω/G vom Geschlecht 1 ist. Auch hierfür benötigen wir ein leicht nachprüfbares Kriterium:

Bemerkung 4.2 Sei $G' \subset \text{PGL}_2(k)$ eine diskontinuierliche Gruppe, die von einer endlichen Gruppe $G \subset G'$ und einem hyperbolischen Element $\gamma \in G'$ erzeugt wird. Es gebe einen Kreis $K \in \mathcal{A}(\gamma)$, der von G fixiert wird.

Sei $K_1 \in \mathcal{A}(\gamma)$ so gewählt, dass K_1 und $K_2 := \gamma(K_1)$ von K den gleichen Abstand d haben.¹ Für die Stabilisatoren H_1 von (K, K_1) und H_2 von (K, K_2) in G' gelte $\gamma H_1 = H_2 \gamma$. Es gebe kein Element $\alpha \in G$ mit $\alpha(K_2) = K_1$.

Dann ist $\Omega(G')/G'$ eine algebraische Kurve vom Geschlecht 1.

Beweis: Nach Satz 3.20 müssen wir zeigen, dass $G' = \langle G, \gamma \rangle$ als abelsche Gruppe vom Rang 1 ist. Da G endlich ist, ist γ der einzige Erzeuger von $G^*/\text{Tor}(G^*)$ (mit $G^* := G'/[G', G']$), der Rang kann also maximal 1 sein. Wir müssen somit nur beweisen, dass der Rang nicht 0 ist. Dafür genügt es zu zeigen, dass γ in der abelschen Gruppe $G'/[G', G']$ nicht von endlicher Ordnung ist, also dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\gamma^n \notin [G', G']$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Angenommen es gibt ein $\kappa \in [G', G']$ mit $\gamma^n = \kappa$. Wir werden diese Annahme zum Widerspruch führen, indem wir zeigen, dass $\varepsilon := \gamma^{-n} \kappa \neq \text{id}$ ist. Hierfür genügt es $\varepsilon(K) \neq K$ zu zeigen. Dazu drücken wir zunächst κ durch die Erzeuger von G' aus und erhalten so²

$$\varepsilon = \delta_0 \prod_{i=1}^k \gamma^{\nu_i} \delta_i \text{ mit } \nu_i \in \mathbb{Z} \text{ und } \delta_i \in G, \text{ sowie } \sum_{i=1}^k \nu_i = -n \neq 0$$

Ohne Einschränkung sei $\nu_i \neq 0$ für alle i und $\delta_i \neq \text{id}$ für $i \in \{1, \dots, k-1\}$.

Wegen $\gamma H_1 = H_2 \gamma$ können wir für $i < k$ weiter ohne Einschränkung $\delta_i \notin H_2$ für $\nu_{i+1} > 0$ und $\delta_i \notin H_1$ für $\nu_{i+1} < 0$ annehmen. Sei nun

$$\varepsilon_j := \prod_{i=j}^k \gamma^{\nu_i} \delta_i$$

und \mathcal{W}_j der Weg im Baum $\mathcal{B}(G')$ von K nach $\varepsilon_j(K)$. Durch Induktion über j zeigen wir: Ist $\nu_j < 0$, so liegt K_1 in \mathcal{W}_j , ansonsten K_2 . Damit gilt $\varepsilon_j(K) \neq K$ für $j \in \{1, \dots, k\}$. Wegen $\delta_0(K) = K$ folgt daraus $\varepsilon(K) = \delta_0 \varepsilon_1(K) \neq K$.

¹ K_1 und K_2 lassen sich immer so wählen, vergleiche Bemerkung 3.47.

²Da κ das Produkt von Elementen der Form $aba^{-1}b^{-1}$ ist, verschwindet die Summe der Potenzen von γ in κ . Außerdem gilt $\varepsilon = \delta_0 \gamma^{-n} \kappa$ mit $\delta_0 = \text{id}$.

Der Induktionsanfang für $j = k$ ist wegen $\varepsilon_k(K) = \gamma^{\nu_k} \delta_k(K) = \gamma^{\nu_k}(K)$ klar, denn K_1 liegt auf $\mathcal{A}(\gamma)$ zwischen K und $\gamma^{-1}(K)$ und K_2 liegt zwischen K und $\gamma(K)$. Sei nun $j < k$, die Behauptung gelte für $j + 1$.

Wir betrachten zunächst den Fall $\nu_{j+1} > 0$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $K_2 \in \mathcal{W}_{j+1}(K)$. Da δ_j nicht in H_2 liegt, gilt $\delta_j(K_2) \neq K_2$. Außerdem gilt nach Voraussetzung $\delta_j(K_2) \neq K_1$. Weil $\delta_j(K_2)$ von K den gleichen Abstand d hat wie K_1 und K_2 , kann $\delta_j(K_2)$ nicht auf der Achse von γ liegen. Dann liegt auch $\delta_j \varepsilon_{j+1}(K)$ nicht auf dieser Achse, da $\delta_j(K_2)$ auf dem Weg $\delta_j(\mathcal{W}_{j+1}(K))$ von K nach $\delta_j \varepsilon_{j+1}(K)$ liegt und $\mathcal{B}(G')$ ein Baum ist. Der Kreis $K' \in \mathcal{A}(\gamma)$ mit minimalem Abstand zu $\delta_j \varepsilon_{j+1}(K)$ liegt auf dem Weg von K nach $\delta_j(K_2)$, es gilt also $\text{dist}(K, K') < d$. Mit $\text{dist}(\gamma(K'), K') = 2d$ folgt:

$$\text{dist}(K, \gamma^{\nu_j}(K')) \geq \text{dist}(K', \gamma^{\nu_j}(K')) - \text{dist}(K, K') > 2d - d = d$$

Der Weg von K nach $K'' := \gamma^{\nu_j}(K')$ verläuft ganz in der Achse von γ , und muss daher (je nach Vorzeichen von ν_j) entweder K_1 oder K_2 enthalten.

K' ist der Kreis in $\mathcal{A}(\gamma)$ mit minimalem Abstand zu $\delta_j \varepsilon_{j+1}(K)$. Also ist K'' der Kreis in $\mathcal{A}(\gamma)$ mit minimalem Abstand zu $\varepsilon_j(K) = \gamma^{\nu_j} \delta_j \varepsilon_{j+1}(K)$. Der Weg von K nach K'' ist also komplett in \mathcal{W}_j enthalten. Damit enthält \mathcal{W}_j auch K_1 beziehungsweise K_2 .

Damit ist der Induktionsschritt für $\nu_{j+1} > 0$ gezeigt. Der Beweis für $\nu_{j+1} < 0$ funktioniert analog. \square

Wir werden jetzt die Bemerkungen 4.1 und 4.2 verwenden, um zwei einfache Mumford-Origamis zu konstruieren.

Bemerkung 4.3 Sei $D := \langle \delta, \sigma \rangle \subset \text{PGL}_2(k)$ eine Diedergruppe mit $n := \text{ord}(\delta)$ ungerade und $\text{ord}(\sigma) = 2$. Weiter sei $q \in k$ mit $|q|$ hinreichend klein³ und $\gamma \in \text{PGL}_2(k)$ zu $z \mapsto qz$ konjugiert mit den gleichen Fixpunkten wie σ . Dann gilt:

- $\Gamma := \langle \delta^i \gamma \delta^{-i} : i \in \{0, \dots, n-1\} \rangle$ ist Schottkygruppe mit n freien Erzeugern.
- Γ ist Normalteiler in $G := \langle \delta, \sigma, \gamma \rangle$ vom Index $2n$.
- G ist diskontinuierliche Untergruppe von $\text{PGL}_2(k)$.
- $f : \Omega/\Gamma \rightarrow \Omega/G$ ist Origami von Mumfordkurven (mit $\Omega = \mathbb{P}(k) \setminus \mathcal{L}(G)$).

Beweis: Nach Bemerkung 2.8 haben wir ohne Einschränkung

$$\delta = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1+q & 1-q \\ 1-q & 1+q \end{pmatrix}$$

wobei ζ eine primitive n -te Einheitswurzel sei.

- Wegen $\text{ord}(\delta) = n$ wird Γ von n Elementen erzeugt. Die Fixpunkte von $\delta^i \gamma \delta^{-i}$ sind $\delta^i(1) = \zeta^i$ und $\delta^i(-1) = -\zeta^i$. Es gilt $|\zeta^i - (-\zeta^i)| = |2\zeta^i| = 1$. Nach Bemerkung 4.1 a) ist Γ also Schottkygruppe, falls gilt:

$$|q| < \min \left\{ |1 \pm \zeta^i|^2 : i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

³so klein, dass die Ungleichung in Teil a) des Beweises erfüllt ist

- b) Sei $\varphi : G \rightarrow D$ der kanonische Homomorphismus $\delta \mapsto \delta, \sigma \mapsto \sigma, \gamma \mapsto 1$.
 Nach Bemerkung 3.54 gilt $\sigma\gamma = \gamma\sigma$, also ist $\text{Kern}(\varphi) = \Gamma$ der von γ erzeugte Normalteiler in G . Es gilt $[G : \Gamma] = |G/\text{Kern}(\varphi)| = |\text{Bild}(\varphi)| = |D| = 2n$.
- c) Γ ist diskontinuierlich nach a) und hat nach b) endlichen Index in G . Also ist nach Bemerkung 2.15 auch G diskontinuierlich.
- d) Nach a) ist $g(\Omega/\Gamma) = n$. Nach Bemerkung 4.2 ist $g(\Omega/G) = 1$ (die Voraussetzungen lassen sich mit Hilfe der im Beweis von Bemerkung 4.1 definierten Kreise und $H_1 = H_2 = \langle \sigma \rangle$ leicht nachrechnen).
 Es gilt $|0 \pm \zeta^i| = 1$ und $|\infty \pm \zeta^i| = \infty$. Für $|q| < 1$ liegen dann nach Bemerkung 4.1 b) die Fixpunkte $x_1 = 0$ und $x_2 = \infty$ von δ in Ω .
 Wegen $\text{ord}(\delta) = n$ verzweigt f in $\Gamma \cdot x_1$ und $\Gamma \cdot x_2$ jeweils mit Ordnung n . Nach Bemerkung 1.18 (Riemann-Hurwitz) gibt es keine weiteren Verzweigungspunkte, da $2g(\Omega/\Gamma) - 2 = 2n - 2 = (n - 1) + (n - 1)$ ist.
 Wegen $\sigma(x_1) = x_2$ ist $f(\Gamma \cdot x_1) = f(\Gamma \cdot x_2)$. Also hat f genau einen kritischen Wert. \square

Bemerkung 4.4 Sei $T := \langle \delta, \sigma \rangle \subset \text{PGL}_2(k)$ eine Tetraedergruppe, $\text{ord}(\delta) = 3$ und $\text{ord}(\sigma) = 2$. Weiter sei $q \in k$ mit $|q|$ hinreichend klein⁴ und $\gamma \in \text{PGL}_2(k)$ zu $z \mapsto qz$ konjugiert mit den gleichen Fixpunkten wie δ . Dann gilt:

- a) $\Gamma := \langle \alpha\gamma\alpha^{-1} : \alpha \in T \rangle$ ist Normalteiler in $G := \langle \delta, \sigma, \gamma \rangle$ vom Index 12.
- b) Γ ist Schottkygruppe mit vier freien Erzeugern.
- c) G ist diskontinuierliche Untergruppe von $\text{PGL}_2(k)$.
- d) $f : \Omega/\Gamma \rightarrow \Omega/G$ ist Origami von Mumfordkurven (mit $\Omega = \mathbb{P}(k) \setminus \mathcal{L}(G)$).

Beweis: Nach Bemerkung 2.10 haben wir ohne Einschränkung

$$\delta = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \gamma = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei ζ eine primitive dritte Einheitswurzel sei. Die Fixpunkte von σ sind $-\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$, die von $\sigma\delta\sigma$ sind 1 und $-\frac{1}{2}$ (ebenfalls nach Bemerkung 2.10).

- a) Sei $\varphi : G \rightarrow T$ der kanonische Homomorphismus $\delta \mapsto \delta, \sigma \mapsto \sigma, \gamma \mapsto 1$. Damit ist $\text{Kern}(\varphi) = \Gamma$ der von γ erzeugte Normalteiler in G .
 Es gilt $[G : \Gamma] = |G/\text{Kern}(\varphi)| = |\text{Bild}(\varphi)| = |T| = 12$.
- b) Es gilt $\Gamma = \langle \gamma, \sigma\gamma\sigma, \delta\sigma\gamma\sigma\delta^{-1}, \delta^{-1}\sigma\gamma\sigma\delta \rangle$, was man mit Bemerkung 2.9 und der Identität $\sigma\delta\sigma = (\delta\sigma\delta)^{-1}$ leicht nachrechnet.
 Die Fixpunkte von γ sind 0 und ∞ , die von $\sigma\gamma\sigma$ sind $\sigma(\infty) = -\frac{1}{2}$ und $\sigma(0) = 1$. Die Fixpunkte der übrigen Erzeuger von Γ erhält man durch Multiplikation mit ζ und ζ^{-1} . Wir sehen, dass alle Fixpunkte (außer denen von γ) den Betrag 1 haben. Außerdem gilt $|\frac{1}{2} - 1| = |\frac{3}{2}| = 1$, was sich durch

⁴so klein, dass die Ungleichung in Teil d) des Beweises erfüllt ist

Multiplikation mit ζ und ζ^{-1} nicht ändert. Also ist Γ nach Bemerkung 4.1 c) Schottkygruppe, falls gilt:

$$|q| < \min \left\{ |1 - \zeta|^2, \left| 1 + \frac{1}{2}\zeta \right|^2 \right\}$$

Nach Bemerkung 3.7 ist $|1 - \zeta| = 1$. Das Minimalpolynom von $1 + \frac{1}{2}\zeta$ ist $4X^2 - 2X + 3$, also ist nach Bemerkung 3.6 auch $\left| 1 + \frac{1}{2}\zeta \right| = \left| \frac{3}{4} \right|^{1/2} = 1$.

c) Γ ist diskontinuierlich nach b) und hat nach a) endlichen Index in G . Also ist nach Bemerkung 2.15 auch G diskontinuierlich.

d) Nach b) ist $g(\Omega/\Gamma) = 4$. Nach Bemerkung 4.2 ist $g(\Omega/G) = 1$ (die Voraussetzungen lassen sich mit Hilfe der im Beweis von Bemerkung 4.1 definierten Kreise und $H_1 = H_2 = \langle \delta \rangle$ leicht nachrechnen).

Seien $\sigma_0 := \sigma$, $\sigma_1 := \delta\sigma\delta^{-1}$ und $\sigma_2 := \delta^{-1}\sigma\delta$ die Spiegelungen in G und x_1, x_2 die Fixpunkte von σ . Dann ist $x_{ij} := \delta^i(x_j)$ Fixpunkt von σ_i .

Alle σ_i sind zu σ konjugiert. Es gilt $\sigma_1(x_1) = x_2$ (dies werden wir in Bemerkung 4.8 noch nachrechnen). Damit liegen alle x_{ij} in einer G -Bahn.

Die x_{ij} liegen in Ω : Da alle x_{ij} in einer G -Bahn liegen, genügt es hierfür $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \notin \mathcal{L}(G)$ zu zeigen. Dies folgt aus Bemerkung 4.1 b), falls

$$|q| < \min \left\{ |x_1 - 1|^2, \left| x_1 + \frac{1}{2} \right|^2, |x_1 - \zeta|^2, \left| x_1 + \frac{1}{2}\zeta \right|^2 \right\}$$

Wegen $\text{ord}(\sigma_i) = 2$ verzweigt f in $\Gamma \cdot x_{ij}$ jeweils mit Ordnung 2. Nach Bemerkung 1.18 (Riemann-Hurwitz) gibt es keine weiteren Verzweigungspunkte, da $2g(\Omega/\Gamma) - 2 = 2 \cdot 4 - 2 = 6 \cdot (2 - 1)$ ist.

Da alle x_{ij} in einer G -Bahn liegen, hat f also genau einen kritischen Wert. \square

4.2 Klappbares

Definition 4.5 Sei $G \subset \text{PGL}_2(k)$. Ein nichttriviales $\alpha \in G$ mit verschiedenen Fixpunkten a_1 und a_2 heißt *klappbar*, falls es ein $\beta \in G$ gibt, so dass gilt:

$$\beta(a_1) = a_2 \quad \text{und} \quad \beta(a_2) = a_1$$

Offensichtlich hängt die Eigenschaft „klappbar“ nur von der Achse von α ab.

Andererseits ist diese Eigenschaft auch unabhängig von der Einbettung von G in $\text{PGL}_2(k)$, wie die folgende Bemerkung zeigt:

Bemerkung 4.6 Seien $\alpha, \beta \in \text{PGL}_2(k)$ elliptisch oder hyperbolisch und a_1, a_2 die Fixpunkte von α . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) $\beta(a_1) = a_2$ und $\beta(a_2) = a_1$
- b) $\alpha^{-1} = \beta^{-1}\alpha\beta \neq \beta$ und $\text{ord}(\beta) = 2$
- c) $\alpha^{-1} = \beta^{-1}\alpha\beta$ und $\beta(a_1) \neq a_1$

Beweis:

a) \Rightarrow b) Die Fixpunkte von β sind nicht a_1 und a_2 , dennoch sind a_1 und a_2 Fixpunkte von β^2 . Damit hat β^2 vier Fixpunkte, also gilt $\beta^2 = \text{id}$ und damit ist $\text{ord}(\beta) = 2$.

Wegen $\beta(a_1) = a_2 \neq a_1 = \alpha^{-1}(a_1)$ ist $\beta \neq \alpha^{-1}$.

Sei $\alpha' := \beta^{-1}\alpha\beta$. Zu zeigen ist noch: $\alpha' = \alpha^{-1}$.

Es gilt $\alpha'(a_1) = \beta^{-1}(a_2) = a_1$ und analog $\alpha'(a_2) = a_2$. Also hat α' die gleiche Achse wie α . Da α' außerdem konjugiert zu α ist, gilt entweder $\alpha' = \alpha$ oder $\alpha' = \alpha^{-1}$.

Falls $\alpha' = \alpha$ ist, gilt $\alpha\beta = \beta\alpha$. Wegen $\mathcal{A}(\beta) \neq \mathcal{A}(\alpha)$ folgt $\text{ord}(\alpha) = 2$ mit Bemerkung 3.54. Also ist $\alpha' = \alpha = \alpha^{-1}$.

b) \Rightarrow c) Falls $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ ist, folgt $\mathcal{A}(\alpha) \neq \mathcal{A}(\beta)$ mit Bemerkung 3.54.

Ansonsten gilt $\alpha^{-1} = \alpha \neq \beta$. Dann wäre $\text{ord}(\alpha) = 2$. Mit Bemerkung 3.54 folgt dann ebenfalls $\mathcal{A}(\alpha) \neq \mathcal{A}(\beta)$.

Nach Bemerkung 3.51 wäre bei $\beta(a_1) = a_1$ jedoch $\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}(\beta)$. Es folgt somit $\beta(a_1) \neq a_1$.

c) \Rightarrow a) $\beta(a_1) = \beta\alpha^{-1}(a_1) = \alpha\beta(a_1)$, also ist $\beta(a_1)$ Fixpunkt von α und damit $\beta(a_1) \in \{a_1, a_2\}$. Da a_1 kein Fixpunkt von β ist, ist $\beta(a_1) = a_2$ und analog $\beta(a_2) = a_1$. \square

Die folgende Bemerkung erklärt die Bedeutung von klappbaren Elementen für die Konstruktion von Mumfordkurven:

Bemerkung 4.7 Sei Ω/G eine Mumfordkurve mit $G = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_g \rangle$, wobei die α_i elliptisch, die γ_i hyperbolisch und g das Geschlecht von Ω/G ist. Dann ist keines der γ_i klappbar.

Beweis: Angenommen $\gamma := \gamma_i$ mit Fixpunkten a_1 und a_2 ist klappbar, es gibt also ein β mit $\beta(a_1) = a_2$ und $\beta(a_2) = a_1$. Damit gilt ebenfalls $\gamma\beta(a_1) = a_2$ und $\gamma\beta(a_2) = a_1$. Nach Bemerkung 3.52 sind dann sowohl β als auch $\gamma\beta$ elliptisch. Statt dem hyperbolischen Erzeuger γ könnten wir beim Erzeugen von G also auch die elliptischen Erzeuger β und $\gamma\beta$ verwenden. Dann hätte G jedoch nur $g - 1$ hyperbolische Erzeuger. Nach Satz 3.20 steht dies im Widerspruch zu $g = g(\Omega/G)$. \square

Nun ermitteln wir in allen endlichen Untergruppen von $\text{PGL}_2(k)$ die klappbaren Elemente:

Bemerkung 4.8 Sei $G \subset \text{PGL}_2(k)$ endlich und $n \in \mathbb{N}$.

a) Für $G \in \{D_{2n}, O, I\}$ sind alle nichttrivialen Elemente von G klappbar.

b) Für $G = D_{2n+1}$ sind alle Drehungen klappbar.

c) Für $G = T$ sind alle Elemente von Ordnung 2 klappbar.

Beweis: Es gilt $D_n = \langle \sigma, \delta; \sigma^2 = \delta^n = (\delta\sigma)^2 = \text{id} \rangle$, $T = A_4$, $O = S_4$ und $I = S_5$. Wir verwenden für Elemente von S_n die Zykelschreibweise. Sei $\alpha \in G$.

$G = A_4$: $\text{ord}(\alpha) = 2$, ohne Einschränkung sei $\alpha = (1\ 2)(3\ 4)$.
Dann ist $(1\ 3)(2\ 4)\alpha(1\ 3)(2\ 4) = \alpha^{-1} \neq (1\ 3)(2\ 4)$.

$G = S_4$: i) $\text{ord}(\alpha) = 2$, ohne Einschränkung sei $\alpha = (1\ 2)$
(die andere Möglichkeit wurde bereits bei $G = A_4$ betrachtet).
Dann ist $(1\ 2)(3\ 4)\alpha(1\ 2)(3\ 4) = \alpha^{-1} \neq (1\ 2)(3\ 4)$.

ii) $\text{ord}(\alpha) = 3$, ohne Einschränkung sei $\alpha = (1\ 2\ 3)$.
Dann ist $(1\ 2)\alpha(1\ 2) = \alpha^{-1} \neq (1\ 2)$.

iii) $\text{ord}(\alpha) = 4$, ohne Einschränkung sei $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4)$.
Dann ist $(1\ 2)(3\ 4)\alpha(1\ 2)(3\ 4) = \alpha^{-1} \neq (1\ 2)(3\ 4)$.

$G = A_5$: i) $\text{ord}(\alpha) \in \{2, 4\}$ ergibt sich wie bei $G = S_4$.

ii) $\text{ord}(\alpha) = 3$, ohne Einschränkung sei $\alpha = (1\ 2\ 3)$.
Dann ist $(1\ 2)(4\ 5)\alpha(1\ 2)(4\ 5) = \alpha^{-1} \neq (1\ 2)(4\ 5)$.

iii) $\text{ord}(\alpha) = 5$, ohne Einschränkung sei $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$.
Dann ist $(1\ 3)(4\ 5)\alpha(1\ 3)(4\ 5) = \alpha^{-1} \neq (1\ 3)(4\ 5)$.

$G = D_{2n}$: i) α ist eine Drehung, also $\alpha = \delta^k$.
Wegen $\delta\sigma\delta = \sigma$ ist $\sigma\alpha\sigma = \alpha^{-1} \neq \sigma$.

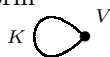
ii) α ist eine Spiegelung, also $\alpha = \delta^k\sigma$.
Dann ist $\delta^n\alpha\delta^n = \delta^k\delta^n\sigma\delta^n = \delta^k\delta^n\delta^{-n}\sigma = \alpha \neq \delta^n$.

$G = D_{2n+1}$: Drehungen sind wie im Fall $G = D_{2n}$ klappbar.

Die Behauptungen folgen jeweils mit Bemerkung 4.6. □

4.3 Tertium datur

In diesem Abschnitt wollen wir alle möglichen Mumford-Origamis für den Fall $\text{char}(\bar{k}) > 5$ bestimmen.⁵ Wir werden dazu zunächst zeigen, dass der Quotientengraph im Wesentlichen die Form



hat, wobei K eine zyklische Untergruppe von V ist. Falls der hyperbolische Erzeuger des Kreises die gleiche Achse hat wie der elliptische Erzeuger von K , dann dürfen beide wegen Bemerkung 4.7 nicht klappbar sein. Damit bleiben für V nach Bemerkung 4.8 nur die beiden Origamis aus Abschnitt 4.1 übrig. Falls die Achsen nicht übereinstimmen gibt es jedoch noch weitere Möglichkeiten.

Zunächst benötigen wir jedoch noch ein kombinatorisches Hilfsmittel:

Bemerkung 4.9 Sei \mathcal{G} ein endlicher Graph, v die Anzahl der Ecken von \mathcal{G} und e die Anzahl der Kanten. Die *Betti-Zahlen* von \mathcal{G} sind die Anzahl der Zusammenhangskomponenten $b_0(\mathcal{G})$ und das Geschlecht $b_1(\mathcal{G})$. Dabei ist das Geschlecht von \mathcal{G} die Anzahl der Kanten, die man aus \mathcal{G} mindestens entfernen muss, damit \mathcal{G} keinen Kreis mehr enthält.

⁵Für $\text{char}(\bar{k}) > 5$ gibt es nach Bemerkung 3.50 nur wenige nichtzyklische Kantengruppen, was die Bestimmung der Origamis vereinfacht.

- a) Es gilt die Euler-Poincaré-Formel $v - e = b_0(\mathcal{G}) - b_1(\mathcal{G}) =: \chi(\mathcal{G})$. Dabei heißt $\chi(G)$ die *Euler-Charakteristik* von \mathcal{G} .
- b) Für eine diskontinuierliche Untergruppe G von $\mathrm{PGL}_2(k)$ ist das Geschlecht von $\mathcal{G}(G)$ gleich dem Geschlecht der Kurve $\Omega(G)/G$.

Beweis:

- a) Ist \mathcal{G} ein Baum, so gilt $v - e = 1$. Für einen Wald⁶ gilt daher $v - e = b_0(\mathcal{G})$. Ist \mathcal{G} ein beliebiger Graph, so können wir $b_1(\mathcal{G})$ Kanten aus \mathcal{G} entfernen, um einen Wald zu erhalten (ohne dabei $b_0(\mathcal{G})$ zu verändern). Es folgt also $v - (e - b_1(\mathcal{G})) = b_0(\mathcal{G})$.
- b) Das Geschlecht von $\Omega(G)/G$ ist nach Satz 3.20 b) der Rang von G als abelsche Gruppe, also die Anzahl der hyperbolischen Erzeuger von G . Der Graph $\mathcal{G}(G)$ entsteht aus dem Baum $\mathcal{B}(G)$ dadurch, dass für jeden hyperbolischen Erzeuger zwei Ecken identifiziert werden. Also entspricht $b_1(\mathcal{G})$ ebenfalls der Anzahl der hyperbolischen Erzeuger von G . \square

Bemerkung 4.10 Sei $f : \Omega/\Gamma \rightarrow \Omega/G$ ein Mumford-Origami. Sei \mathcal{N} der Teilgraph des Quotientengraphen $\mathcal{G}(G)$, der alle Ecken und Kanten mit nichttrivialen Gruppen enthält. Sei \mathcal{D} der Teilgraph von \mathcal{N} , der alle Ecken und Kanten mit nichtzyklischen Gruppen enthält.

Dann ist \mathcal{N} zusammenhängend und enthält einen Kreis, \mathcal{D} ist nicht leer und zusammenhängend oder enthält einen Kreis.

Beweis: Ist eine Kantengruppe nichttrivial, so sind auch beide zugehörigen Eckengruppen nichttrivial, da die Kantengruppe Untergruppe beider Eckengruppen sein muss. Zu jeder Kante in \mathcal{N} liegen daher auch beide Ecken in \mathcal{N} , also ist \mathcal{N} tatsächlich ein Graph. Genauso ist auch \mathcal{D} ein Graph.

Da f ein Origami ist, hat der Graph $\mathcal{G}(G)$ nach Bemerkung 4.9 Geschlecht 1, also enthält der Graph genau einen Kreis.

Sei v_z die Anzahl der nichttrivialen zyklischen und v_n die der nichtzyklischen Eckengruppen. Seien e_z und e_n die analogen Bezeichnungen für die Kantengruppen. Setze nun

$$q := \chi(\mathcal{N}) = b_0(\mathcal{N}) - b_1(\mathcal{N}) = (v_n - e_n) + (v_z - e_z)$$

Falls \mathcal{N} leer ist, gilt $q = 0$. Sonst ist $b_0(\mathcal{N}) \geq 1$ und $b_1(\mathcal{N}) \leq b_1(\mathcal{G}(G)) = 1$, also gilt $q \geq 0$. Ebenso gilt $\chi(\mathcal{D}) = v_n - e_n = b_0(\mathcal{D}) - b_1(\mathcal{D}) \geq 0$.

Nun gilt nach [3], Theorem 1 für die Anzahl n der kritischen Werte von f :

$$n = 3(v_n - e_n) + 2(v_z - e_z) = \chi(\mathcal{D}) + 2\chi(\mathcal{N}) = (b_0(\mathcal{D}) - b_1(\mathcal{D})) + 2q$$

Da f ein Origami ist, ist $n = 1$. Mit $q \geq 0$ folgt daraus sofort $q = 0$ und $b_0(\mathcal{D}) - b_1(\mathcal{D}) = 1$. Falls \mathcal{D} keinen Kreis enthält, ist $b_1(\mathcal{D}) = 0$. Daraus folgt $b_0(\mathcal{D}) = 1$, also ist \mathcal{D} in diesem Fall zusammenhängend.

Wegen $q = b_0(\mathcal{N}) - b_1(\mathcal{N})$ gilt $b_0(\mathcal{N}) = b_1(\mathcal{N}) = 1$. Daher ist \mathcal{N} zusammenhängend und enthält den Kreis von $\mathcal{G}(G)$. \square

⁶Ein *Wald* ist ein Graph ohne Kreise.

Nun werden wir eine Ecke konstruieren, deren Eckengruppe alle anderen Ecken- und Kantengruppen aus $\mathcal{G}(G)$ enthält.

Definition 4.11 Ist $D \subset \mathrm{PGL}_2(k)$ eine Diedergruppe, so schneiden sich nach Bemerkung 3.46 die Achsen aller Elemente von D in einer Ecke. Diese Ecke nennen wir die *Basisecke* von D . Ist $D' \subseteq D$ ebenfalls eine Diedergruppe, so sind die Basisecken beider Gruppen gleich.

Ohne Einschränkung nehmen wir in den folgenden Beweisen an, dass der Baum $\mathcal{B}(G)$ alle Basisecken von Diedergruppen in G enthält (ist dies nicht der Fall, so können wir die fehlenden Ecken zu $\mathcal{B}(G)$ hinzunehmen). Die Eckengruppe der Basisecke von D enthält die Gruppe D , denn jedes elliptische Element fixiert nach Bemerkung 3.45 alle Ecken auf seiner Achse.

Bemerkung 4.12 Sei $\mathrm{char}(\bar{k}) > 5$ und G eine diskontinuierliche Untergruppe von $\mathrm{PGL}_2(k)$. Sei \mathcal{D} ein Teilbaum des Teilgraphen von $\mathcal{G}(G)$, der alle Ecken und Kanten mit nichtzyklischen Gruppen enthält. Dann gilt:

- a) Entweder enthält \mathcal{D} genau eine Ecke, oder alle Ecken- und Kantengruppen von \mathcal{D} sind Diedergruppen.
- b) Es gibt eine Ecke in \mathcal{D} , in der sich die Achsen aller Elemente aus Eckengruppen von \mathcal{D} schneiden. Wir nennen diese Ecke *Basisecke* von \mathcal{D} .

Beweis: Falls \mathcal{D} nur eine Ecke enthält, sind beide Aussagen klar. Sei also e eine Kante in \mathcal{D} mit den Ecken v_1 und v_2 .

- a) Wegen $\mathrm{char}(\bar{k}) > 5$ sind nach Bemerkung 3.50 sowohl die Kantengruppe von e als auch die Eckengruppen von v_1 und v_2 Diedergruppen.
- b) Da die Kantengruppe von e in den Eckengruppen von v_1 und v_2 enthalten ist, sind die Basisecken der beiden Eckengruppen gleich. Da \mathcal{D} zusammenhängend ist, gilt dies auch für alle anderen Eckengruppen von \mathcal{D} . Die gemeinsame Basisecke aller Gruppen ist damit die gesuchte Ecke. \square

Bemerkung 4.13 Sei G eine diskontinuierliche Untergruppe von $\mathrm{PGL}_2(k)$. Sei \mathcal{C} ein zusammenhängender Teil des Graphen von $\mathcal{G}(G)$, der nur Ecken und Kanten mit zyklischen, nichttrivialen Gruppen und keinen Kreis enthält (\mathcal{C} entsteht aus einem Teilbaum \mathcal{C}' von $\mathcal{G}(G)$ durch Hinzufügen von beliebig vielen Kanten, von denen nur eine Ecke in \mathcal{C}' liegt). Dann haben alle Elemente der Ecken- und Kantengruppen von \mathcal{C} die gleiche Achse. Die Eckengruppe jeder Ecke auf dieser Achse enthält alle Ecken- und Kantengruppen von \mathcal{C} .

Beweis: Sei K die Gruppe einer Kante in \mathcal{C} , deren Ecken beide in \mathcal{C} liegen, und $A = \langle \alpha \rangle$ und $B = \langle \beta \rangle$ die Gruppen der zugehörigen Ecken.

Da K nicht trivial ist, enthält $K = A \cap B$ ein nichttriviales Element κ . Die Achse von κ ist gleich der Achse von α , da $\kappa \in \langle \alpha \rangle$ ist. Ebenso ist die Achse von κ gleich der Achse von β .

Somit haben alle Elemente der Eckengruppen von \mathcal{C} die gleiche Achse. Jede Ecke v auf dieser Achse wird von allen Eckengruppen von \mathcal{C} fixiert, diese sind also alle im Stabilisator von v enthalten. Da die Kantengruppen in \mathcal{C} Untergruppen der Eckengruppen sind, folgt die Behauptung auch für die Kantengruppen. \square

Lemma 4.14 Sei $\text{char}(\bar{k}) > 5$ und $f : \Omega/\Gamma \rightarrow \Omega/G$ ein Mumford-Origami. Sei \mathcal{D} der Teilgraph von $\mathcal{G}(G)$, der alle Ecken und Kanten mit nichtzyklischen Gruppen enthält, und $\gamma \in G$ der hyperbolische Erzeuger des Kreises in $\mathcal{G}(G)$. Dann gilt:

- a) Falls \mathcal{D} zusammenhängend ist, gibt es eine Ecke in \mathcal{D} , deren Eckengruppe alle Eckengruppen in $\mathcal{G}(G)$ enthält. Wir nennen sie *Basisecke* von $\mathcal{G}(G)$.
- b) Es gibt eine Ecke in \mathcal{D} , deren Eckengruppe alle Ecken- und Kantengruppen des Kreises enthält.
- c) Der Kreis enthält eine zyklische Eckengruppe $\langle \alpha \rangle$.
- d) \mathcal{D} ist zusammenhängend.

Für die Aussage c) gehen wir davon aus, dass die Kanten von $\mathcal{G}(G)$ fein genug unterteilt sind. Ansonsten kann die konstruierte Ecke problemlos dem Graphen hinzugefügt werden, indem eine Kante durch zwei Kanten ersetzt wird (dabei sollte man sich an die Konstruktion von $\mathcal{B}(G)$ in Bemerkung 3.31 erinnern).

Beweis: Alle Kantengruppen des Kreises sind nach Bemerkung 4.10 nichttrivial.

- a) Nach Bemerkung 4.12 b) hat \mathcal{D} eine Basisecke. Deren Gruppe enthält alle anderen Eckengruppen aus \mathcal{D} . Sei \mathcal{N} wieder der Teilgraph von $\mathcal{G}(G)$, der alle Ecken und Kanten mit nichttrivialen Gruppen enthält. Nach Bemerkung 4.10 ist \mathcal{N} zusammenhängend. Zu jeder Ecke in $\mathcal{N} \setminus \mathcal{D}$ gibt es also einen Weg zu einer Ecke v in \mathcal{D} , der (bis auf die Ecke v) nur Ecken und Kanten mit zyklischen Gruppen enthält. Nach Bemerkung 4.13 haben alle Elemente dieser Gruppen die gleiche Achse, und da die letzte zyklische Kantengruppe Untergruppe der Eckengruppe V von v ist, muss diese Achse auch schon als Achse eines Elements in V auftreten. Falls V Diedergruppe ist, liegt die Basisecke von V auf dieser Achse. Ansonsten ist V nach Bemerkung 4.12 a) die einzige Eckengruppe in \mathcal{D} .
- b) Falls der Kreis ganz in \mathcal{D} enthalten ist, folgt die Behauptung aus Bemerkung 4.12 b) für einen maximalen Teilbaum des Kreises, also auch für den ganzen Kreis (denn die zusätzliche Kantengruppe ist Untergruppe einer Eckengruppe). Ansonsten ist \mathcal{D} nach Bemerkung 4.10 nicht leer und zusammenhängend. Die Behauptung folgt dann aus a).
- c) Sei v die in b) konstruierte Ecke. Falls v die einzige nichtzyklische Ecke des Kreises ist, haben alle anderen Ecken des Kreises zyklische Gruppen (gibt es keine anderen Ecken, so fügen wir wie oben beschrieben eine zusätzliche Ecke ein). Ansonsten ist die Eckengruppe von v eine Diedergruppe D und mindestens eine Kante des Kreises wird von einer Diedergruppe fixiert. Da alle Elemente von Ordnung 2 wegen $\text{char}(\bar{k}) > 2$ nach Bemerkung 3.49 nur ihre Achse fixieren, muss diese Kante auf der Achse einer Spiegelung von D liegen. Nach Bemerkung 3.46 schneiden sich die Achse der Drehungen in D und einer Spiegelung nur in einer Ecke. Also kann die Kante nicht auf der Achse einer Drehung in D liegen. Es gibt also eine Ecke im Kreis, die nicht auf der Achse der Drehungen in D liegt.

Angenommen es gibt eine Drehung δ in D , die alle Ecken des Kreises fixiert. Ihre Ordnung muss eine Potenz von p sein. Da mindestens eine Ecke des Kreises nicht auf der Achse von δ liegt, gibt es eine Ecke des Kreises, die zu $\mathcal{A}(\delta)$ und $\mathcal{A}(\gamma\delta\gamma^{-1})$ den gleichen Abstand hat. Da diese Ecke von δ fixiert wird, wird sie auch von $\gamma\delta\gamma^{-1}$ fixiert. Ihre Eckengruppe muss eine Diedergruppe sein, es gibt somit nur eine mögliche Drehachse. Also gilt $\mathcal{A}(\delta) = \mathcal{A}(\gamma\delta\gamma^{-1})$. Mit Bemerkung 3.55 folgt $\mathcal{A}(\gamma) = \mathcal{A}(\delta)$. Dann müssten alle Ecken des Kreises auf $\mathcal{A}(\delta)$ liegen. Wir haben jedoch oben gezeigt, dass dies nicht möglich ist.

Jede Ecke, die von zwei verschiedenen Spiegelungen fixiert wird, wird auch vom Produkt dieser beiden Spiegelungen fixiert. Dieses Produkt ist eine Drehung. Wie oben gezeigt gibt es eine Ecke des Kreises, die von keiner Drehung, also auch von maximal einer Spiegelung fixiert wird. Da die Eckengruppe dieser Ecke nichttrivial ist, enthält sie als einziges nichttriviales Element diese Spiegelung.

- d) Wegen c) kann \mathcal{D} den Kreis nicht ganz enthalten. Also ist \mathcal{D} nach Bemerkung 4.10 zusammenhängend. \square

Lemma 4.15 Sei $\text{char}(\bar{k}) > 5$ und $f : \Omega/\Gamma \rightarrow \Omega/G$ ein Mumford-Origami. Dann gilt:

- a) G lässt sich von einer endlichen, nichtzyklischen Gruppe V und einem hyperbolischen Element $\gamma \in \text{PGL}_2(k)$ erzeugen.
- b) Es gibt eine Ecke auf $\mathcal{A}(\gamma)$, deren Stabilisator von einem Element $\alpha \in V$ erzeugt wird.
- c) Das Element $\beta := \gamma^{-1}\alpha\gamma$ liegt nicht nur in $\gamma^{-1}V\gamma$, sondern auch in V . Die Stabilisatoren von $\mathcal{A}(\alpha)$ und $\mathcal{A}(\beta)$ haben gleich viele Elemente.
- d) Sind a_1 und a_2 die Fixpunkte von α , so gibt es kein $\delta \in V$ mit $\delta(a_1) = \gamma(a_2)$. Falls α klappbar ist, so gilt $\mathcal{A}(\alpha) \neq \mathcal{A}(\gamma)$ und es gibt kein $\delta \in V$ mit $\delta^{-1}\beta\delta = \alpha^{-1}$.

Beweis:

- a) Sei v die Basisecke von $\mathcal{G}(G)$ wie in Lemma 4.14 a), V deren Eckengruppe und $\gamma \in G$ der hyperbolische Erzeuger des Kreises in $\mathcal{G}(G)$. Da V alle Eckengruppen von $\mathcal{G}(G)$ enthält, erhält man aus V durch Konjugation mit γ alle elliptischen Elemente in G . Es gilt also $G = \langle V, \gamma \rangle$.
- b) Sei $v_1 \in \mathcal{B}(G)$ ein Lift von v und $v_2 := \gamma(v_1)$. Nach Lemma 4.14 c) gibt es eine Ecke auf der Achse von γ mit zyklischer Eckengruppe $\langle \alpha \rangle$ für ein $\alpha \in V$.
- c) Das Element α aus b) fixiert nach Bemerkung 4.13 alle zyklischen Ecken- und Kantengruppen zwischen v_1 und v_2 . Vertauschen wir in Teil b) die Ecken v_1 und v_2 , so sehen wir, dass α auch in der Eckengruppe $\gamma V \gamma^{-1}$ von v_2 enthalten sein muss. Es gibt also ein $\beta \in V$ mit $\alpha = \gamma\beta\gamma^{-1}$.

Da α und β konjugiert sind, sind auch die Stabilisatoren ihrer Achsen konjugiert und haben daher gleich viele Elemente.

- d) Seien a_1 und a_2 die Fixpunkte von α . Gäbe es ein $\delta \in V$ mit $\delta^{-1}\gamma(a_2) = a_1$, so wäre $\delta^{-1}\gamma$ nach Bemerkung 3.52 elliptisch. Aber $G = \langle V, \delta^{-1}\gamma \rangle$ und $g(\Omega/G) = 1$, was nach Satz 3.20 nur für hyperbolisches $\delta^{-1}\gamma$ möglich ist.

Sei ab jetzt α klappbar. Es gibt also ein $\sigma \in V$ mit $\sigma(a_1) = a_2$. Falls a_1 und a_2 auch Fixpunkte von γ sind, so setze $\delta := \sigma$ und es gilt wieder $\delta^{-1}\gamma(a_2) = a_1$. Wir haben jedoch eben gezeigt, dass dies nicht möglich ist.

Seien $b_1 := \gamma^{-1}(a_1)$ und $b_2 := \gamma^{-1}(a_2)$ die Fixpunkte von β . Sei weiter $\delta \in V$ mit $\delta^{-1}\beta\delta = \alpha^{-1}$. Es gilt $\delta^{-1}(\{b_1, b_2\}) = \{a_1, a_2\}$. Wir haben bereits gezeigt, dass $\delta^{-1}(b_2) = a_1$ nicht möglich ist, also gilt $\delta^{-1}(b_2) = a_2$. Dann ist jedoch $\delta\sigma(a_1) = b_2$, was wegen $\delta\sigma \in V$ ebenfalls nicht erlaubt ist. \square

Mit diesem Lemma können wir jetzt alle möglichen Mumford-Origamis für $\text{char}(\bar{k}) > 5$ aufzählen. Vorher werden wir uns überlegen, wie man den Quotientengraphen vereinfachen kann, ohne dabei wichtige Informationen zu verlieren:

Definition 4.16 Sei \mathcal{G} ein Graph von Gruppen. Eine Kante, deren Ecken verschieden sind, heißt *kontrahierbar*, wenn ihre Kantengruppe E isomorph zu einer der beiden Eckengruppen A ist. Damit kann A als Untergruppe der anderen Eckengruppe B aufgefasst werden. Wir können die Kante *kontrahieren*, indem wir sie aus \mathcal{G} entfernen und ihre Ecken identifizieren. Als Eckengruppe können wir B verwenden, da A darin enthalten ist.

Der *kontrahierte Graph* von \mathcal{G} entsteht aus \mathcal{G} , indem jede kontrahierbare Kante kontrahiert wird.

Satz 4.17 Sei $\text{char}(\bar{k}) > 5$, G eine endlich erzeugte diskontinuierliche Untergruppe von $\text{PGL}_2(k)$ und Γ eine Schottkygruppe, die Normalteiler von endlichem Index in G ist. Außerdem sei

$$f : \Omega/\Gamma \rightarrow \Omega/G$$

ein Origami. Dann gibt es eine endliche Gruppe $G' \subset \text{PGL}_2(k)$ und ein hyperbolisches $\gamma \in \text{PGL}_2(k)$ mit $G = \langle G', \gamma \rangle$. Außerdem gibt es ein $\alpha \in G'$, so dass $\gamma\alpha\gamma^{-1} \in G'$ gilt. Für G' und α gilt entweder $G' \cong T$ und $\text{ord}(\alpha) = 3$ oder $G' \cong D_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und α ist eine Spiegelung. Für jeden Fixpunkt a von α müssen dabei die Bahnen $G'a$ und $G'\gamma(a)$ verschieden sein.

Hieraus folgt: f ist genau dann ein Mumford-Origami, wenn entweder

$$z_3 \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \bullet \end{array}^T \quad \text{oder} \quad z_2 \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \bullet \end{array}^{D_n}$$

der kontrahierte Quotientengraph von G ist. Insbesondere hängt diese Eigenschaft nur von der Gruppe G und nicht von dem gewählten Normalteiler Γ ab.⁷

Beweis: Die Existenz von G' und γ erhalten wir aus Lemma 4.15 a). Aus Teil c) dieses Lemmas erhalten wir ein $\alpha \in G'$ mit $\beta := \gamma\alpha\gamma^{-1} \in G'$, aus Teil d) folgt die Aussage über die Fixpunkte von α . Wir untersuchen in allen endlichen Gruppen $G' \subset \text{PGL}_2(k)$ aus Satz 2.7 alle Möglichkeiten für α und β . Dabei werden die Konjugationsklassen in den Gruppen I , O und T als bekannt vorausgesetzt⁸.

⁷Man kann daher zu einem gegebenen Mumford-Origami durch Wahl von anderen Normalteilern Γ beliebig viele weitere Mumford-Origamis über der gleichen Kurve Ω/G konstruieren.

⁸Wer die Konjugationsklassen der Polyedergruppen nicht kennt, kann sich diese leicht ausrechnen. Dazu muss man nur jedes Element mit jedem anderen Element konjugieren. Es sind nur endlich viele. Man kann sich natürlich auch einfach die zugehörigen Polyeder vorstellen. . .

- $G' \cong I$: Nach Bemerkung 4.8 a) sind alle Elemente in I klappbar. Außerdem sind alle Elemente gleicher Ordnung in I zueinander konjugiert, also insbesondere α und β . Dies ist nach Lemma 4.15 d) nicht möglich.
- $G' \cong O$: Wieder sind nach Bemerkung 4.8 a) alle Elemente in O klappbar. Wie eben gilt $\text{ord}(\alpha) \notin \{3, 4\}$, da dann in O wieder α zu β konjugiert wäre. Sei also $\text{ord}(\alpha) = \text{ord}(\beta) = 2$. Falls es ein Element $\alpha_* \in G'$ gibt mit $\alpha_*^2 = \alpha$, so muss wegen Lemma 4.15 c) auch ein $\beta_* \in G'$ mit $\beta_*^2 = \beta$ existieren. Die Elemente α_* und β_* haben Ordnung 4, sie sind also konjugiert. Damit sind auch α und β konjugiert. Falls es andererseits beide Elemente α_* und β_* nicht gibt, so sind α und β in O ebenfalls konjugiert. Da α und β aber wegen Lemma 4.15 d) nicht konjugiert sein dürfen, ist auch $G' \cong O$ nicht möglich.
- $G' \cong T$: Die Elemente von Ordnung 2 in T sind nach Bemerkung 4.8 c) alle klappbar und außerdem zueinander konjugiert, also für α nicht erlaubt. Also muss $\text{ord}(\alpha) = 3$ gelten.
- $G' \cong D_n$: Für $n = 2$ ist jedes $\alpha \in D_2$ eine Spiegelung. Sei also $n > 2$. Die Drehungen in D_n haben alle die gleiche Achse. Ist α Drehung, so muss auch β Drehung sein (für $\text{ord}(\alpha) > 2$ ist dies klar; aus Lemma 4.15 c) folgt dies auch für $\text{ord}(\alpha) = 2$). Also haben α und β die gleiche Achse, und diese ist nach Bemerkung 4.8 klappbar, was nach Lemma 4.15 d) nicht möglich ist. Also muss α Spiegelung sein.
- $G' \cong Z_n$: Dieser Fall ist nach Lemma 4.15 a) nicht möglich.

Nach Lemma 4.14 a) enthält die Eckengruppe der Basisecke von $\mathcal{G}(G)$ alle anderen Eckengruppen. Also kann jede Kante (zwischen verschiedenen Ecken) kontrahiert werden. Da α in G' und in $\gamma^{-1}G'\gamma$ enthalten ist, liegt α in der Kantengruppe der einzigen Kante im kontrahierten Graphen. Nach Lemma 4.14 c) muss diese Kantengruppe zyklisch, also gleich $\langle \alpha \rangle$ sein, und wir erhalten die angegebenen Graphen.

Andererseits hat jeder der angegebenen Quotientengraphen genau eine nichtzyklische Eckengruppe und genau eine zyklische nichttriviale Kantengruppe. Mit der Formel für die Anzahl der kritischen Werte von f aus [3], Theorem 1 (die wir auch schon im Beweis zu Bemerkung 4.10 verwendet haben) sehen wir, dass die Anzahl der kritischen Werte von f genau $3(1 - 0) + 2(0 - 1) = 1$ ist. Also ist f dann ein Origami. \square

Nach Satz 4.17 benötigen wir zur Konstruktion eines Mumford-Origamis eine diskontinuierliche Gruppe $G = \langle V, \gamma \rangle \subset \text{PGL}_2(k)$, wobei G' eine endliche Gruppe und γ hyperbolisch ist. In Abschnitt 4.1 haben wir γ so gewählt, dass die Achse von γ gleich der Achse eines Elements in G' ist. Diese Achse darf nach Bemerkung 4.7 nicht klappbar sein, also konnten wir nach Bemerkung 4.8 nur Origamis für $G' = T$ und $G' = D_n$ mit ungeradem $n \in \mathbb{N}$ konstruieren.

Diese Konstruktion werden wir in den beiden folgenden Bemerkungen dahingehend verallgemeinern, dass γ nun nicht mehr die gleiche Achse wie ein Element von G' haben muss. Damit muss die Existenz eines Elements mit einer nicht klappbaren Achse in G' nicht mehr vorausgesetzt werden. Wir können so in Bemerkung 4.20 schließlich auch mit der Gruppe $G' = D_n$ für gerade $n \in \mathbb{N}$ Mumford-Origamis konstruieren.

Bemerkung 4.18 Sei $D := \langle \delta, \sigma \rangle \subset \mathrm{PGL}_2(k)$ eine Diedergruppe, $\mathrm{ord}(\sigma) = 2$ und $n := \mathrm{ord}(\delta)$ ungerade. Weiter sei $q \in k$ mit $|q|$ wie in Bemerkung 4.3 hinreichend klein und $\gamma \in \mathrm{PGL}_2(k)$ zu $z \mapsto qz$ konjugiert mit den gleichen Fixpunkten wie σ . Für beliebiges $\beta \in D$ gilt dann:

$G := \langle \delta, \sigma, \gamma' := \beta\gamma\beta^{-1}\gamma \rangle$ ist diskontinuierlich. Für jede Schottkygruppe Γ , die Normalteiler von endlichem Index in G ist, ist die Abbildung

$$f : \Omega/\Gamma \rightarrow \Omega/G$$

ein Mumford-Origami. Ein solcher Normalteiler Γ existiert nach Satz 3.20.

Beweis: Nach Bemerkung 4.3 ist $G' := \langle \delta, \sigma, \gamma \rangle$ diskontinuierlich, also gilt dies auch für $G \subset G'$.

Seien jetzt Γ und f wie in der Behauptung gegeben. Wir müssen zeigen, dass f genau einen kritischen Wert hat. Nach Bemerkung 2.8 haben wir wieder ohne Einschränkung

$$\delta = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1+q & 1-q \\ 1-q & 1+q \end{pmatrix}$$

wobei ζ eine primitive n -te Einheitswurzel sei.

Seien nun $K := K^+(0, 1)$, $K_1 := \gamma^{-1}(K)$ und $K_2 := \beta\gamma\beta^{-1}(K)$. Dann bildet γ' den Kreis K_1 auf den Kreis K_2 ab. Der Stabilisator von K in G ist die Diedergruppe D . Der Kreis K_1 wird nur von σ fixiert, falls $|q|$ wie in Bemerkung 4.3 hinreichend klein ist. Dies gilt somit auch für die Kante (K, K_1) . Der Kreis K_2 und die Kante (K, K_2) werden analog nur von $\beta\sigma\beta^{-1}$ fixiert.

Der Quotientengraph $\mathcal{G}(G)$ enthält damit nur Ecken und Kanten mit nichttrivialen Gruppen, beide Kantengruppen und genau eine der beiden Eckengruppen sind zyklisch (beachte dabei, dass K_1 und K_2 in $\mathcal{G}(G)$ identifiziert werden). Mit der Formel für die kritischen Werte von f aus [3], Theorem 1 (die wir auch schon im Beweis zu Bemerkung 4.10 verwendet haben) sehen wir, dass die Anzahl der kritischen Werte von f genau $3(1-0) + 2(1-2) = 1$ ist.

Nach Bemerkung 4.2 ist $g(\Omega(G)/G) = 1$ (um hier die Voraussetzungen zu erfüllen, verwendet man die eben definierten Kreise K, K_1, K_2 und die Stabilisatoren $H_1 := \langle \sigma \rangle$ und $H_2 := \langle \beta\sigma\beta^{-1} \rangle$). \square

Bemerkung 4.19 Sei $T := \langle \delta, \sigma \rangle \subset \mathrm{PGL}_2(k)$ eine Tetraedergruppe, $\mathrm{ord}(\delta) = 3$ und $\mathrm{ord}(\sigma) = 2$. Weiter sei $q \in k$ mit $|q|$ wie in Bemerkung 4.4 hinreichend klein und $\gamma \in \mathrm{PGL}_2(k)$ zu $z \mapsto qz$ konjugiert mit den gleichen Fixpunkten wie δ . Für beliebiges $\beta \in T$ gilt dann:

$G := \langle \delta, \sigma, \gamma' := \beta\gamma\beta^{-1}\gamma \rangle$ ist diskontinuierlich. Für jede Schottkygruppe Γ , die Normalteiler von endlichem Index in G ist, ist die Abbildung

$$f : \Omega/\Gamma \rightarrow \Omega/G$$

ein Mumford-Origami. Ein solcher Normalteiler Γ existiert nach Satz 3.20.

Beweis: Analog zum Beweis von Bemerkung 4.18. \square

Bemerkung 4.20 Sei $D' := \langle \delta, \sigma \rangle \subset \mathrm{PGL}_2(k)$ eine Diedergruppe, $\mathrm{ord}(\sigma) = 2$ und $n := \mathrm{ord}(\delta)$ durch vier teilbar. Weiter sei $q \in k$ mit $|q|$ hinreichend klein⁹ und $\gamma \in \mathrm{PGL}_2(k)$ zu $z \mapsto qz$ konjugiert mit den gleichen Fixpunkten wie σ .

Dann gilt:

- a) $G' := \langle \delta, \sigma, \gamma \rangle$ ist diskontinuierlich.
- b) $D := \langle \delta^2, \sigma \rangle$ ist Diedergruppe, $\mathrm{ord}(\delta^2)$ ist gerade.
- c) Für $i \in \mathbb{N}$ ist $G_i := \langle D, \gamma' := \delta^i \gamma \delta^{-i} \rangle$ diskontinuierlich.
- d) Sei i ungerade. Für jede Schottkygruppe Γ , die Normalteiler von endlichem Index in G_i ist, ist die Abbildung

$$f : \Omega/\Gamma \rightarrow \Omega/G_i$$

ein Mumford-Origami. Ein solcher Normalteiler Γ existiert nach Satz 3.20.

Beweis:

- a) Sei $\varphi : G' \rightarrow D'$ der kanonische Homomorphismus $\delta \mapsto \delta, \sigma \mapsto \sigma, \gamma \mapsto 1$. Wegen $\sigma\gamma = \gamma\sigma$ ist

$$\Gamma' := \mathrm{Kern}(\varphi) = \langle \delta^i \gamma \delta^{-i} : i \in \{1, \dots, n\} \rangle$$

der von γ erzeugte Normalteiler in G' . Wegen $|D'| < \infty$ hat Γ' endlichen Index in G' .

Da n gerade ist, gilt $\delta^{n/2} \gamma \delta^{-n/2} = \gamma^{-1}$. Wir können also die Hälfte der Erzeuger von γ weglassen und erhalten

$$\Gamma' = \langle \delta^i \gamma \delta^{-i} : i \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\} \rangle$$

Sei ζ eine n -te Einheitswurzel. Wie im Beweis von Bemerkung 4.3 a) sind dann für

$$|q| < \min \left\{ |1 \pm \zeta^i|^2 : i \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\} \right\}$$

die Voraussetzungen von Bemerkung 4.1 erfüllt, und wir sehen, dass Γ' Schottkygruppe ist. Insbesondere ist Γ' diskontinuierlich. Nach Bemerkung 2.15 ist dann auch G' diskontinuierlich.

- b) D ist als nichtzyklische Untergruppe einer Diedergruppe wieder Diedergruppe. Da $\mathrm{ord}(\delta)$ durch vier teilbar ist, ist $\mathrm{ord}(\delta^2)$ gerade.
- c) Als Untergruppe von G' ist auch G_i diskontinuierlich.
- d) zeigt man analog zum Beweis von Bemerkung 4.18. Um $g(\Omega/G_i) = 1$ zu zeigen, sollte man sich dabei klarmachen, dass es kein $j \in \mathbb{N}$ mit $\delta^i \gamma \delta^{-i} = (\delta^2)^j \gamma^{-1} (\delta^2)^{-j}$ gibt, da i ungerade ist. \square

⁹so klein, dass die Ungleichung in Teil a) des Beweises erfüllt ist

Symbolverzeichnis

$g(F)$	Geschlecht der Fläche F	6
$\mathbb{P}^n(k)$	n -dimensionaler projektiver Raum über k	9
$\mathbb{P}(k)$	projektive Gerade über k	13
∞	unendlich (als Element von $\mathbb{P}(k)$)	13
$\mathrm{PGL}_2(k)$	Gruppe der Möbiustransformationen	14
$\mathcal{L}(G)$	Menge der Limespunkte von G	19
$\Omega(G)$	Diskontinuitätsbereich von G	19
k^0	Bewertungsring von k	22
k^{00}	maximales Ideal im Bewertungsring von k	22
\bar{k}	Restklassenkörper von k	22
\mathbb{Q}_p	Körper der p -adischen Zahlen	23
\mathbb{C}_p	vollständiger und algebraischer Abschluss von \mathbb{Q}_p	23
$K^+(x, r)$	endliche Kreisscheibe um x mit Radius r	26
$\tilde{\mathcal{K}}$	System der Kreisscheiben in $\mathbb{P}(k)$	26
$\mathrm{rad}(K)$	Radius einer Kreisscheibe	26
\mathcal{K}	System von Äquivalenzklassen von $\tilde{\mathcal{K}}$	28
$M(K_1, K_2)$	kleinste Kreisscheibe, die die Kreise K_1 und K_2 enthält	28
$[G, G]$	Kommutatorgruppe von G	31
$\mathrm{Tor}(G)$	Torsionsgruppe von G	31
$\mathcal{B}(G)$	Baum von Kreisscheiben, auf dem G operiert	35
$\mathcal{G}(G)$	Quotientengraph von G	37
$\mathrm{dist}(K_1, K_2)$	Abstand der Kreise K_1 und K_2	39
\mathcal{A}_∞^0	Achse in \mathcal{K} mit Endpunkten 0 und ∞	40
$\mathcal{A}(\alpha)$	Achse einer Möbiustransformation	41
$\chi(\mathcal{G})$	Euler-Charakteristik des Graphen \mathcal{G}	53

Index

- Abstand von Kreisen, 39
- Achse, 34, 40
- affine Varietät, 8
- algebraisch abgeschlossen, 7
- algebraische Kurve, 8
- algebraische Menge, 8

- Bahn, 15
- Basisecke, 54, 55
- Betrag, 21
- Betti-Zahlen, 52
- Bewertungsring, 22
- Bruhat-Tits-Baum, 33

- Decktransformation, 12
- Dimension, 8
- diskontinuierlich, 18, 19
- Diskontinuitätsbereich, 19
- diskrete Abbildung, 10
- diskrete Menge, 10
- diskreter Betrag, 32

- eigentlich diskontinuierlich, 18
- elliptisch, 14
- Ende, 34
- endliche Überlagerung, 10
- Endpunkte, 41
- Euler-Charakteristik, 7, 53

- galoissch, 12
- Geschlecht, 6, 10
- Grad einer Überlagerung, 10

- homogen, 9
- homogene Koordinaten, 9
- hyperbolisch, 14

- irreduzibel, 8

- klappbar, 50
- Kommutatorgruppe, 31
- kontrahierbar, 57
- kontrahierter Graph, 57
- Kreisscheiben, 26
- kritischer Wert, 10
- Kurve, 8

- Limespunkt, 19
- lokal-endlich, 34

- Möbiustransformation, 14
- Mumford-Kurve, 2, 11, 19, 31
- Mumford-Origami, 31

- nichtarchimedisch, 21
- nichtsingulär, 8
- Nullstellenmenge, 8

- offene Abbildung, 10
- Origami, 1, 6, 11

- p -adischer Betrag, 22
- parabolisch, 14
- projektive Gerade, 13
- projektive Varietät, 9
- projektiver Raum, 9

- Quotientengraph, 37

- Radius, 26
- Restklassenkörper, 22
- Riemannsche Fläche, 7
- Riemannsche Zahlenkugel, 13

- Schnittsystem, 6
- Schottkygruppe, 19
- Stabilisator, 17, 37
- stetige Abbildung, 10
- Strahl, 34

- Torsionsgruppe, 31

- Überlagerung, 10

- Varietät, 8, 9
- Verzweigungsordnung, 10
- Verzweigungspunkt, 10

Literaturverzeichnis

- [1] Y. AMICE, Les nombres p -adiques.
Le mathématicien **14**, Presses Universitaires de France (1975)
- [2] S. BOSCH, Algebra.
Springer (1993)
- [3] P. E. BRADLEY, Riemann existence theorems of Mumford type.
erscheint in: Mathematische Zeitschrift, Springer (2005)
DOI: 10.1007/s00209-005-0808-7
- [4] L. R. FORD, Automorphic Functions.
Chelsea (1929)
- [5] O. FORSTER, Riemannsche Flächen.
Heidelberger Taschenbücher **184**, Springer (1977)
- [6] L. GERRITZEN, M. VAN DER PUT, Schottky Groups and Mumford Curves.
Lecture Notes **817**, Springer (1980)
- [7] R. HARTSHORNE, Algebraic Geometry.
Graduate Texts **52**, Springer (1977)
- [8] F. HERRLICH, Endlich erzeugbare p -adische diskontinuierliche Gruppen.
Archiv der Mathematik **35**, 505–515, Birkhäuser (1980)
- [9] F. HERRLICH,
 p -adisch diskontinuierlich einbettbare Graphen von Gruppen.
Archiv der Mathematik **39**, 204–216, Birkhäuser (1982)
- [10] F. KATO, Non-archimedean orbifolds covered by Mumford curves.
Journal of Algebraic Geometry **14**, 1–34 (2005)
- [11] P. LOCHAK, On Arithmetic Curves in the Moduli Space of Curves.
Preprint (2003)
- [12] G. SCHMITHÜSEN, An algorithm for finding the Veech Group of an Origami.
Experimental Mathematics **13**, 459–472, Peters (2004)
- [13] J. STILLWELL, Classical Topology and Combinatorial Group Theory
Graduate Texts **72**, 2nd edition, Springer (1993)