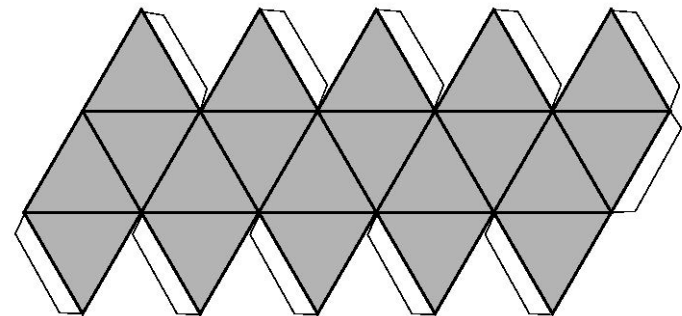
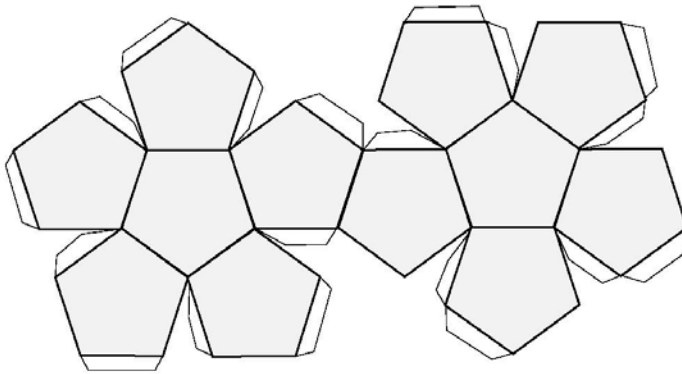


Das Bastelbogenproblem

JProf. Dr. Petra Schwer
Tag der Mathematik, 7. März 2015

Institut für Algebra und Geometrie, Fakultät für Mathematik



Das Bastelbogenproblem

Die Frage

Gibt es für jedes konvexe Polyeder einen Bastelbogen?

ist ein offenes, unbeantwortetes Forschungsproblem.

Etwas genauer:

Man möchte wissen, ob jedes konvexe Polyeder entlang seiner Kanten so aufgeschnitten werden, dass es sich ohne Selbstüberschneidungen in die Ebene abwickeln lässt.

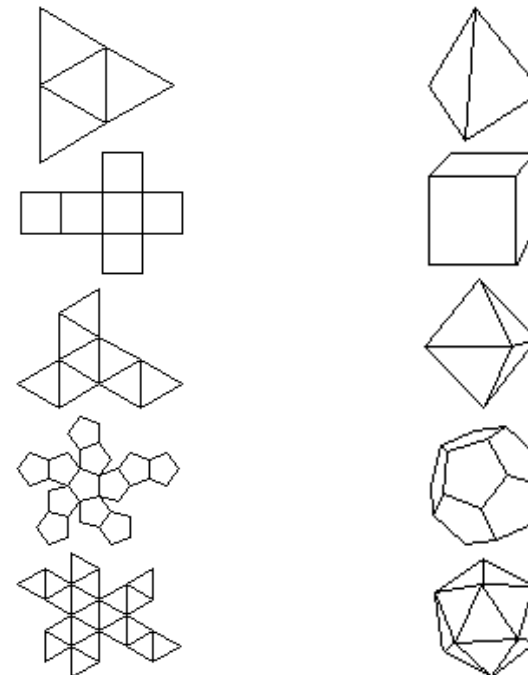
Beispiele und Eigenschaften

Abwicklungen (Bastelbögen)
der platonischen Körper:

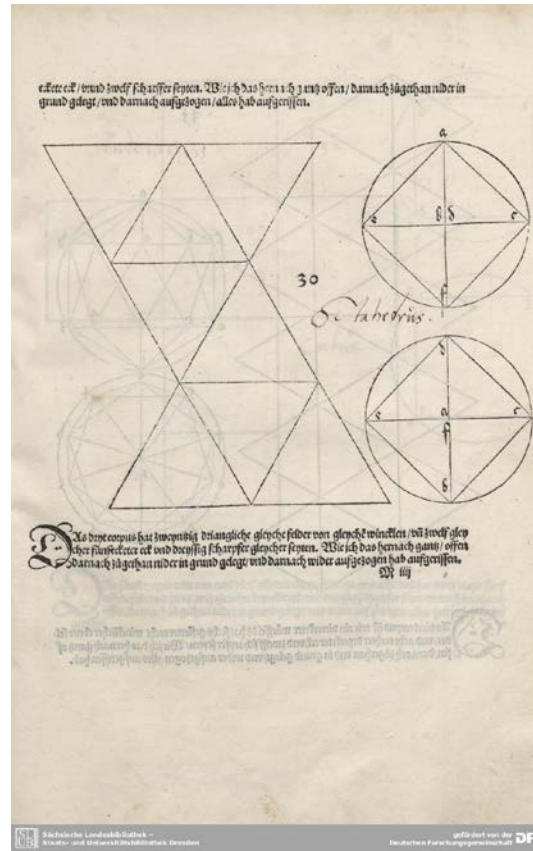
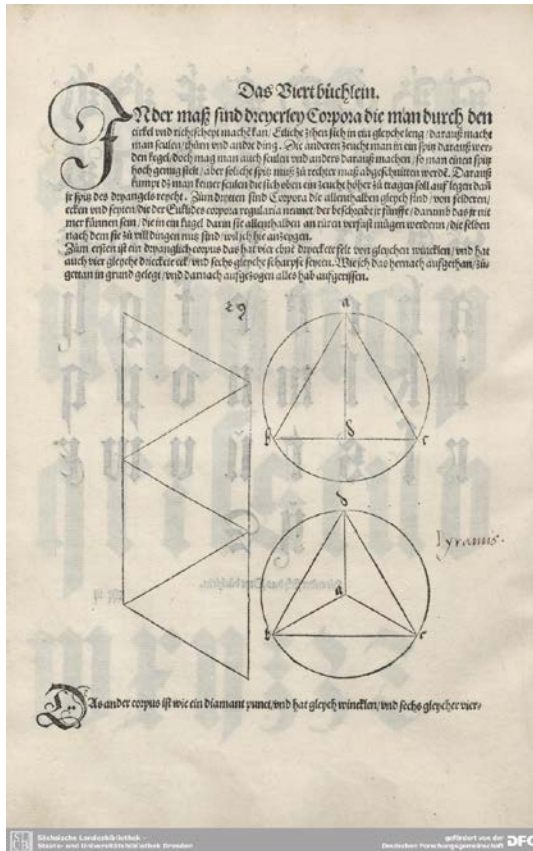
Tetraeder, Würfel, Oktaeder,
Dodekaeder und Ikosaeder.

Eigenschaften:

- Abwicklungen sind nur für sehr einfache Klassen von Polyedern bekannt.
- Abwicklungen sind nicht eindeutig.
- Abwicklungen entsprechen immer einem Ecken-aufspannenden Kantenbaum.



Albrecht Dürer über Bastelbögen

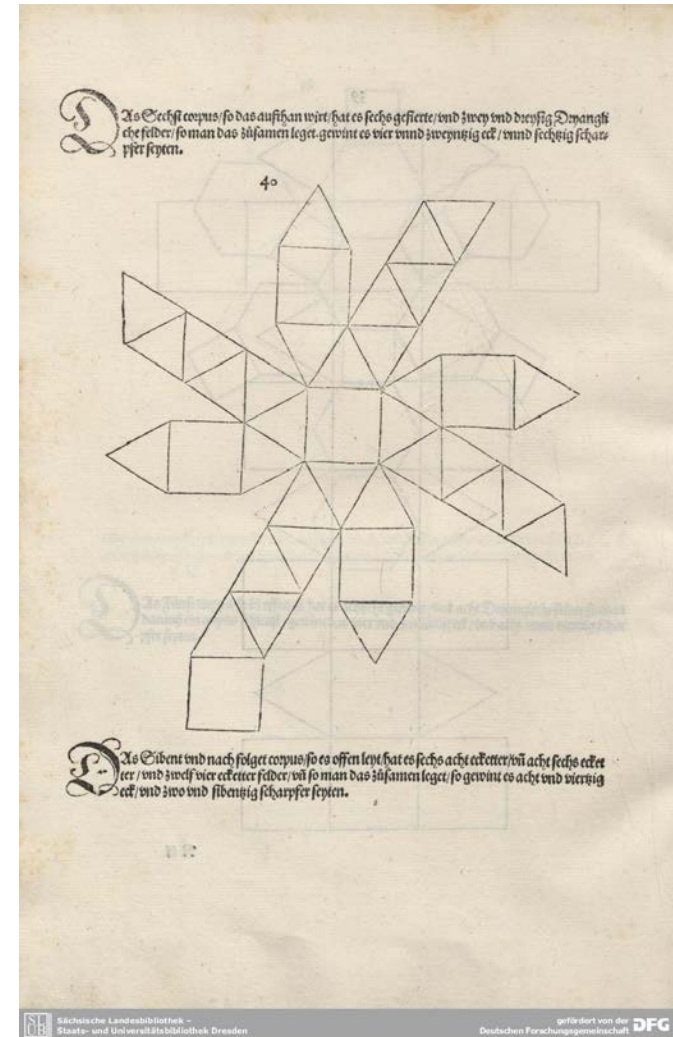
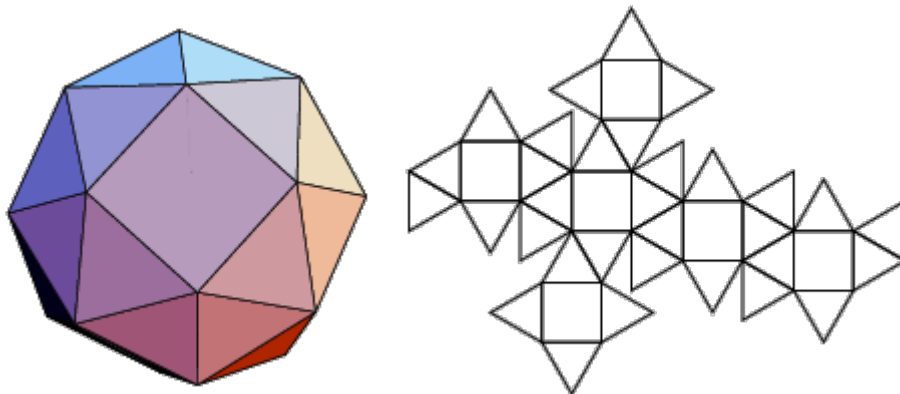


Das abgeschrägte Hexaeder

Das abgeschrägte Hexaeder ist ein chirales Polyeder, das zu den Archimedischen Körpern zählt.

Es besteht aus 6 Quadraten und 32 gleichseitigen Dreiecken, hat 24 Ecken sowie 60 Kanten.

Es wurde von Dürer wiederentdeckt.



Varianten der Fragestellung

- Mehr Freiheit in der Wahl der Schnitte:

Gibt es immer eine Abwicklung ohne Selbstüberschneidung, wenn man beliebige Schnitte auch über die Seiten erlaubt?

- Bastelbögen für allgemeinere Körper:

Gibt es Bastelbögen für nicht-konvexe Polyeder?

Varianten der Fragestellung

- Mehr Freiheit in der Wahl der Schnitte:

Gibt es immer eine Abwicklung ohne Selbstüberschneidung, wenn man beliebige Schnitte auch über die Seiten erlaubt?

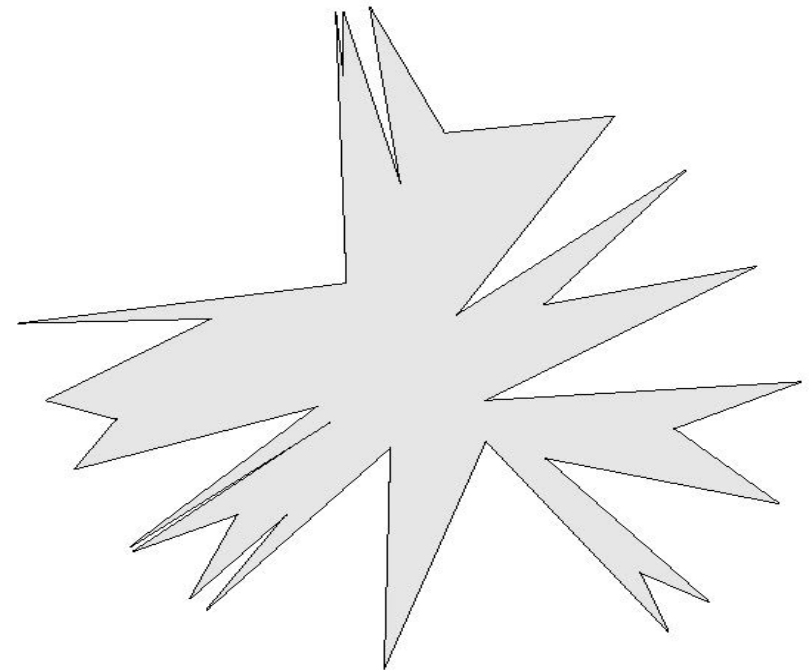
→ Ja, für konvexe Polyeder immer.

Sternförmige Abwicklung

Jedes konvexe Polyeder lässt sich sternförmig in die Ebene abwickeln.

Dabei sind Schnitte „quer über die Seiten“ zwingend nötig.

Es ist klar, dass solche Schnitte einen Ecken-aufspannenden Kantenbaum liefern. Dass dieser überschneidungsfrei ist, ist schwierig zu zeigen.



(B. Aronov, J. O'Rourke 1992)

Varianten der Fragestellung

- Bastelbögen für allgemeinere Körper:

Gibt es Bastelbögen für nicht-konvexe Polyeder?

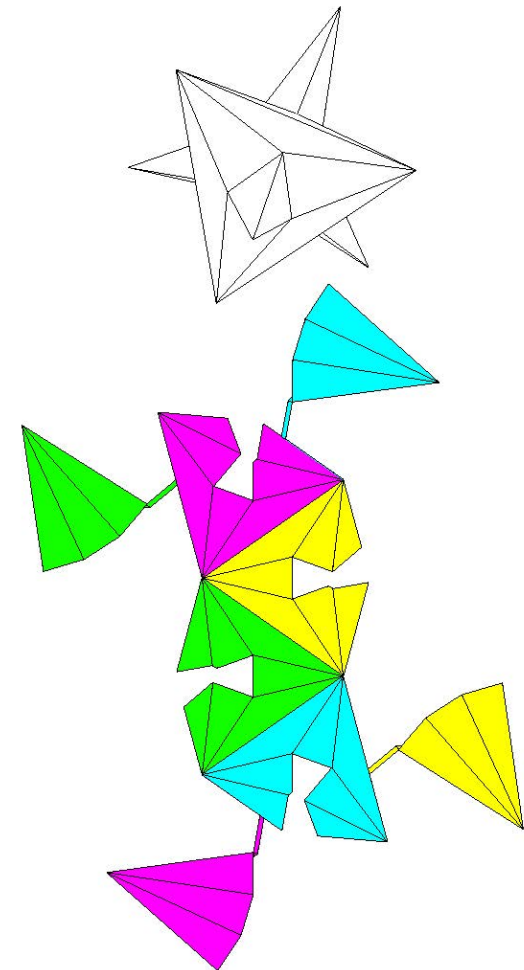
→ Nein, die gibt es nicht immer.

Polyeder ohne Bastelbogen

Hier ein Beispiel eines nicht-konvexen Polyeders ohne Bastelbogen.

In bunt ist eine Abwicklung, die Schnitte über die flachen Seiten benutzt, abgebildet.

(E. Demaine, J. O'Rourke 2005)



Faltungen – das umgekehrte Problem

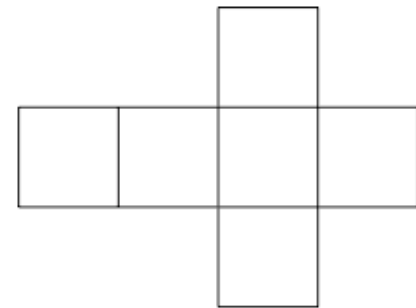
Die Frage

Zu welchen Polyedern kann ein Bastelbogen gefaltet werden, wenn man die Knicke anders platziert?

Ist ebenfalls offen.

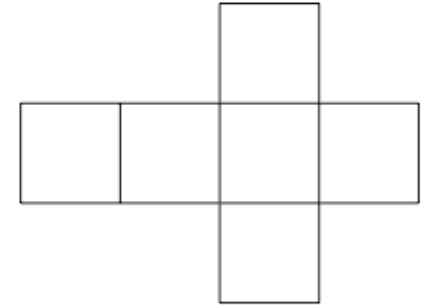
Folgendes **Beispiel** ist bekannt:

Welche Formen kann man noch aus diesem Kreuzbastelbogen des Würfels bauen?

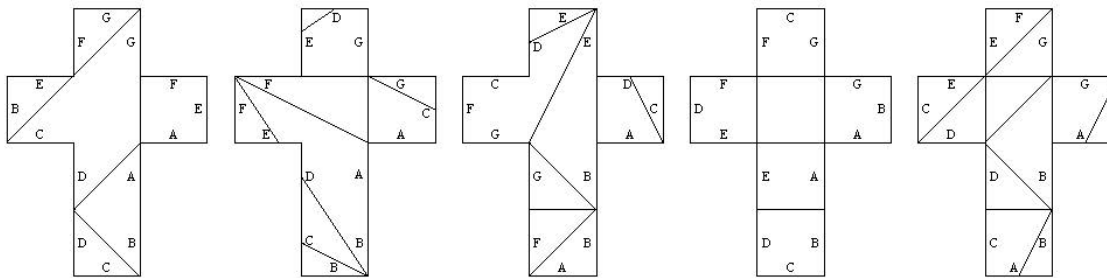


Faltungen des Würfels

Welche Formen kann man noch aus diesem Kreuzbastelbogen des Würfels bauen?



Es sind genau folgende 5 Möglichkeiten gegeben:



- (a) Doubly covered quadrangle (b) Tetrahedron (c) Pentahedron (d) Cube (e) Octahedron

(Lubiw, O'Rourke 1996)

Faltungen des Würfels

Zum Abschluss ein Video über Faltungen und Bastelbögen eines Würfels

[Metamorphosis of the cube:](https://www.youtube.com/watch?v=n5Xt2_sTkZQ)

https://www.youtube.com/watch?v=n5Xt2_sTkZQ

von
Erik Demaine, Martin Demaine, Anna Lubiw, Joseph O'Rourke, Irena Paschenko
(2010)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

bei Fragen:
petra.schwer@kit.edu

Referenzen

- B. Aronov und J. O'Rourke. *Nonoverlap of the star unfolding*. Discrete Comput. Geom. 8:219-250, 1992.
- E. Demaine, J. O'Rourke. *A survey of Folding and Unfolding in Computational Geometry*. Combin. and Comput. Geom. 52, 2005.
- S. Gupta, D. Bourne, K. Kim, S. Krishnan. *Automated process planning for sheet metal bending operations*. J. Manufacturing Systems, 17(5):338-360, 1998.
- N. Namiki und K. Fukuda. *Unfolding 3-dimensional convex polytopes: A package for Mathematica 1.2 or 2.0* Mathematica Notebook, Univ. of Tokyo, 1993.
- Dürer. *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien, Ebenen unnd gantzen corporen*.
<http://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/17139/142/0/>
- www.youtube.com/watch?v=n5Xt2_sTkZQ
- Viele mathematische Bastelbögen auf
<https://www.vismath.eu/de/bastelboegen/>