RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Geometrische Gruppentheorie
Heidelberg, 2.11.2017

Hausaufgaben 1

Themenblock: Basics über Gruppen

Abgabe alleine oder in Zweierpaaren bis zum 13.11.2017 im ersten Stock
Besprechung am 15.11.2017

Aufgabe 1. (Semidirektes Produkt)
Sei eine Erweiterung G von Q durch N gegeben, die spaltet, d.h. für die kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$$

gibt es eine Abbildung $s : Q \longrightarrow G$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_Q$. Zeigen Sie, dass dann G das semidirekte Produkt von Q mit N ist.

Aufgabe 2. (Bahnensatz)
Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Zeigen Sie, dass für alle $x \in X$ die Abbildung

$$\begin{aligned} G/G_x &\to G.x \\ g \cdot G_x &\mapsto g.x \end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv ist.

Aufgabe 3. (Präsentierung der trivialen Gruppe)
Zeigen Sie, dass die Gruppe $\langle a, b |\ aba^{-1}b^{-2}, bab^{-1}a^{-2} \rangle$ trivial ist.

Aufgabe 4. (Gruppenpräsentierungen)

a) Sei G eine Gruppe, die eine Präsentierung mit n Erzeugern und m Relationen besitzt. Ein weiteres Erzeugendensystem mit l Elementen sei durch T gegeben. Zeigen Sie, dass G durch $\langle T|R \rangle$ mit $|R| \leq m + l$ präsentiert werden kann.

b) Sei G eine Gruppe, die ein endliches Erzeugendensystem S besitzt, zu dem es keine endliche Menge an Relationen R gibt, so dass $G = \langle S|R \rangle$ gilt. Zeigen Sie, dass G nicht endlich präsentierbar ist.

Aufgabe 5. (Freie Erzeugendensysteme)
Sei S ein Erzeugendensystem einer Gruppe G. Zeigen Sie:

a) Ist $s, s^{-1} \in S$, dann ist S kein freies Erzeugendensystem.

b) Ist $\mathrm{id}_G \in S$, dann ist S kein freies Erzeugendensystem.

c) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ ist nicht frei erzeugt.