RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Geometrische Gruppentheorie
Heidelberg, 23.10.2017

Präsenzübung 1 A

Thema der Woche: Gruppen als Symmetrien

Besprechung in der Übung am 25.10.2017

Aufgabe 1. (Zum Aufwärmen: Semidirektes Produkt)
Zeigen Sie, dass mit den Notationen der Vorlesung (Def. 1.18) $N \rtimes_\varphi Q$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 2. (Die Symmetrische Gruppe)

a) Finden Sie von einem Element erzeugte Untergruppen von S_3 die normal sind und solche, die nicht normal sind.

b) Wir betrachten folgende Untergruppen H_i der S_n:

$$n = 5 : H_1 = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \rangle, \quad n = 5 : H_2 = \langle (1\ 2\ 3)(4\ 5) \rangle, \quad n = 6 : H_3 = \langle (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6) \rangle$$

Diese wirken in natürlicher Weise auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$. Sind diese Wirkungen frei? Transitiv?

Aufgabe 3. (Faktorgruppen)
Sei G eine Gruppe und $N < G$ eine Untergruppe.

a) Zeigen Sie, woran die Wohldefiniertheit der Abbildung $G/N * G/N \to G/N$ scheitert, wenn $N < G$ nicht normal ist.

b) Finden Sie ein konkretes Beispiel für eine Gruppe G und eine Untergruppe N, so dass G/N keine Gruppe ist.

c) Finden Sie ein Beispiel, das die universelle Eigenschaft von Faktorgruppen (Satz 1.15 (c)) veranschaulicht.

d) Der Index von N in G ist die Anzahl der Links-Nebenklassen von N in G. Zeigen Sie, dass eine Untergruppe von Index 2 normal ist.

Aufgabe 4. (Diedergruppen)
Zeigen Sie, dass die zwei Definitionen von Diedergruppen aus der Vorlesung (Beispiel 1.11 und Beispiel 1.19 (3)) äquivalent sind und die selbe Gruppe definieren.

Aufgabe 5. (Gruppenwirkung)
In der Vorlesung haben Sie zwei Begriffe für Gruppenwirkungen gesehen (Definition 2.1 und Bemerkung 2.2). Zeigen Sie, dass diese äquivalent sind.