Seminar Abbildungsklassengruppen

Unqualifizierter Mitschrieb eines Pseudobourbakisten

Sommer 2007[1]

[1]Version: 24. Mai 2007

Inhaltsverzeichnis

Warnung: Da mich Bourbaki die Topologie lehrte und das Pamphlet von Querenburg das einzige Buch ist, für dessen Besitz ich mich schäme, halte ich mich an die topologische Sprechweise von Bourbaki [Bou71]. Insbesondere implizieren kompakt als auch lokalkompakt jeweils Hausdorffsch. Eine Menge $M \subseteq X$ ist diskret, falls sie als Teilraum die diskrete Topologie trägt. Desweiteren weiche ich teilweise deutlich vom Seminar ab und habe hier und da nach Belieben ergänzt und ebenfalls beliebig gestrichen. Alle Fehler gehen auf mich zurück.

Kapitel 1

Zollernblick

1.1 Triangulierungen

Definition 1.1.

a) X Hausdorffraum[1] heißt *Mannigfaltigkeit* der Dimension n, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ gibt und Homöomorphismen $\phi_i : U_i \to V_i$ mit $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

b) X heißt *von abzählbarem Typ*, wenn es eine abzählbare Basis der Topologie gibt[2].

Definition 1.2.

a) Δ_n bezeichne den *Standard-n-Simplex*, d.h. die konvexe Hülle im $\mathbb{R}^{n+1}$ der Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$.

b) Für $I \subseteq \{1, \ldots, n+1\}$ heißt die konvexe Hülle Δ_I von $\{e_i \mid i \in I\}$ $(\#I - 1)$-dimensionale Seite von Δ_n.

c) Ein *Simplex* in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X ist eine abgeschlossene Teilmenge T, welche zu Δ_n homöomorph ist.

d) Eine *Triangulierung* von X ist eine abzählbare Familie $(T_i)_{i \in I}$ von Simplizes von X sodaß

[1] notwendig, da uns beispielsweise zwei Einheitskreise, welche überall außerhalb der Mittelpunkte entsprechend verklebt sind, keinen Hausdorffraum bescheren.

[2] das ist äquivalent dazu, daß es eine *abzählbare* Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ dieser Form gibt, wobei die Abschlüsse $\overline{U_i}$ als *kompakt* angenommen werden *können*, aber nicht *müssen*. Denn jedes U_i besitzt dann eine abzählbare Basis, weswegen X eine abzählbare Basis besitzt. Da jedes U_i lokalkompakt ist, dürfen wir annehmen, daß die Abschlüsse der Basiselemente kompakt sind. Diese überdecken dann X und es genügen abzählbar viele. Desweiteren sei angemerkt, daß X stets *lokalkompakt* ist und falls X von *endlichem Typ* ist, so ist es ebenfalls *parakompakt*. Denn X ist dann, wie wir bereits gesehen haben, eine abzählbare Vereinigung von Kompakta, ergo σ-kompakt (bzw. *dénombrable à l'infini* was bedeutet, daß der Punkt ∞ in der Alexandroffschen Einpunktkompaktifizierung eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt). Ergo ist X *parakompakt* [Bou71, chap. I, §9, no. 10, Théorème 5]. Nehmen wir umgekehrt an, daß X parakompakt ist, so ist X auch von endlichem Typ. Denn da X lokalkompakt ist, zeigt [Bou71, chap. I, §9, no. 10, Théorème 5, Corollaire], daß X σ-kompakt, also von endlichem Typ ist. Wir haben für Mannigfaltigkeiten also die Äquivalenzen

$$X \text{ von endlichem Typ} \Leftrightarrow X\ \sigma\text{-kompakt} \Leftrightarrow X \text{ parakompakt}.$$

Aus der Parakompaktheit von X folgt insbesondere, daß wir zusätzlich annehmen dürfen, daß es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U gibt, so daß es nur *endlich viele* i mit $U \cap U_i \neq \emptyset$ gibt (*lokale Endlichkeit*), sofern X von endlichem Typ ist.

(i) $\bigcup_{i\in I} T_i = X$,

(ii) $T_i \cap T_j$ ist leer oder *eine* Seite für alle zweielementigen Teilmengen $\{i,j\} \subseteq I$.

(iii) für jedes $x \in X$ ist $\{i \in I \mid x \in T_i\}$ endlich.

Satz 1.3. *Jede Fläche S (2-dimensionale Mannigfaltigkeit von abzählbarem Typ) ist triangulierbar.*

Beweis. [Idee] (1) Konstruiere eine abzählbare lokalendliche Überdeckung durch Dreiecke[3].
(2) Verfeinere Überdeckung, sodaß der Durchschnitt je zweier Dreiecke nur endlich viele Zusammenhangskomponenten hat[4].
(3) Jede Zusammenhangskomponente des Durchschnitts zweier Dreiecke ist homöomorph zu einem Dreieck (Satz von Schönflies, gilt in höherer Dimension *nicht*). □

Definition 1.4.

a) Eine *Orientierung* Ξ von Δ_n ist eine Äquivalenzklasse von Anordnungen der Ecken $e_1, \dots, e_{n+1}$ modulo gerader Permutationen[5].

b) Jede Orientierung Ξ von Δ_n induziert eine Orientierung Ξ_I für jede Seite Δ_I, $I \subseteq \{1, \dots, n+1\}$.

c) Sei $(T_i)_{i\in I}$ eine Triangulierung von X, Ξ_i eine Orientierung von T_i für jedes $i \in I$, dann definiert die Familie $(\Xi_i)_{i\in I}$ eine *Orientierung* von X, falls Ξ_i und Ξ_j auf der $(n-1)$-dimensionalen Seite $T_i \cap T_j$ die opposite Orientierung induzieren, für alle zweielementigen $\{i,j\} \subseteq I$ so daß Ξ_i und Ξ_j die gleiche Dimension $n > 1$ haben[6].

d) X heißt *orientierbar*, falls es eine Triangulierung mit einer Orientierung gibt.

Definition 1.5. X heißt *Mannigfaltigkeit mit Rand*, falls es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ mit $U_i \cong \mathfrak{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ oder $U_i \cong \mathfrak{B}_n^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1, x_1 \geq 0\}$ (Halbkugel[7]).

Proposition 1.6. *Sei X eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension n mit Rand ∂X. Dann gelten:*

1) ∂X hat endlich viele Zusammenhangskomponenten.

2) ∂X ist eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Bemerkung. Eine Mannigfaltigkeit S (mit oder ohne Rand) ist bereits wegzusammenhängend, falls sie zusammenhängend ist.

---

[3] o.E. abgeschlossen und so, daß die Inneren eine Überdeckung liefern; das funktioniert, da S lokalkompakt und parakompakt ist.

[4] das Ergebnis ist o.E. wieder eine abzählbare lokalendliche Überdeckung, S war ja lokalkompakt und parakompakt. Im Grunde genügt es daher *möglicherweise*, Schritt (1) durch die Wahl einer *beliebigen* Überdeckung durch Dreiecke zu ersetzen.

[5] daher gibt es in Dimension > 0 genau *zwei* Orientierungen (im Zusammenhängenden Fall im Falle der Existenz...).

[6] problematisch bei dieser Definition: es gibt in höherer Diemsion keinen Zusammenhang zwischen der Orientierung der n-Simplizes und der $(n-1)$-Simplizes, weshalb es konsequenterweise mehr als 2 Orientierungen geben könnte.

[7] Beachte, daß der *Rand* (d.h. $x_1 = 0$) dieser Halbkugel gerade eine $(n-1)$-dimensionale Kugel ist.

1.2 Flächenklassifikation

Satz 1.7 (Satz vom g)**.** *Sei S eine geschlossene*[8] *orientierbare Fläche. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $g \geq 0$, so daß S zu Σ_g isomorph ist. Dabei bezeichnet Σ_g eine Kugel mit g Henkeln*[9]*.*

Beweis. [Idee] Trianguliere Fläche, schneide so lange auf, bis Ergebnis planar und noch zusammenhängend ist. Es entsteht ein ebenes Polygon mit einer geraden Anzahl $2n$ von Seiten, welche paarweise verklebt werden müssen, um S zu erhalten. Je zwei zusammengehörige Seiten sind unterschiedlich orientiert, da S o.E. orientiert.
1. Schritt: o.E. alle Ecken identifiziert. ...
Zwischenüberlegung: zu zwei „vertikalen“ zu identifizierenden Kanten existiert ein paar von „horizontalen“ Kanten, von welchen eine „oben“ und eine „unten“ liegt. Falls nicht, würden die Endpunkte P und Q einer vertikalen Seite miteinander verklebt.
2. Schritt: Sortiere ... □

Für eine Triangulierung $\mathbf{T} = (T_i)_{i\in I}$ ist $\chi(S, (T_i)_{i\in I}) := e(\mathbf{T}) - k(\mathbf{T}) + f(\mathbf{T})$, wobei $e(\mathbf{T})$ die Anzahl der Ecken, $k(\mathbf{T})$ die Anzahl der Kanten, $f(\mathbf{T})$ die Anzahl der Flächen von $(T_i)_{i\in I}$.

Satz 1.8 (Euler-Charakteristik)**.**

0) $\chi(S, (T_i)_{i\in I})$ hängt nicht von der Triangulierung ab und wird als Euler-Charakteristik *$\chi(S)$ bezeichnet.*

a) $\chi(S)$ ist eine Invariante unter Homöomorphie.

b) $\chi(S) = 2 - 2g$.

1.3 Homöomorphismen

X, Y topologische Räume.

Definition 1.9.

a) $f, g : X \to Y$ stetig heißen *homotop*, falls es eine stetige Abbildung $A : X \times [0; 1] \to Y$ (eine *Homotopie*) gibt mit $A(x, 0) = f(x)$ und $A(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Schreibe auch $a_s(x) := A(x, s)$.

b) $f, g : X \to Y$ Homöomorphismen heißen *isotop*, wenn es eine Homotopie A gibt, für welche alle a_s Homöomorphismen sind.

Definition 1.10. $C(X, Y)$ bezeichne die Menge der stetigen Funktionen $f : X \to Y$. Definiere *kompakt-offen*-Topologie auf $C(X, Y)$ durch die Subbasis $(V(K, U))_{K,U}$ wobei $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq Y$ offen und

$$V(K, U) := \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subseteq U\}.$$

[8] kompakte, zusammenhängende
[9] Nehme $4g$-Eck und verklebe...

Proposition 1.11 (Aufgabe 10). *Sind X und Y Mannigfaltigkeiten*[10]*, so ist jeder Weg γ in* $\mathrm{Homöo}(X,Y) \subseteq C(X,Y)$ *ist eine Isotopie von $\gamma(0)$ nach $\gamma(1)$ und jede Isotopie ist von dieser Form.*

Beweis. Sei γ ein solcher Weg. Wir definieren $A : X \times [0;1] \to Y$ durch $(x,s) \mapsto \gamma(s)(x)$. Wir müssen zeigen, daß A stetig ist. Nun sei $(x_0, s_0) \in X \times [0;1]$ und U eine Umgebung von $A(x_0, s_0)$. Dann ist

$$A^{-1}(U) = \{(x,s) \in X \times [0;1] \mid \gamma(s)(x) \in U\}.$$

Wir dürfen annehmen, daß $\overline{U}$ kompakt ist, denn Y ist lokalkompakt. Dann ist die Menge $U_{s_0} := \gamma(s_0)^{-1}(U)$ offen, enthählt x_0 und der Abschluß $K := \overline{U}_{s_0}$ ist kompakt, denn dieser ist via $\gamma(s_0)$ homöomorph zu $\overline{U}$. Nun ist jedes γ stetig, weswegen die Menge $V_K := \gamma^{-1}(V(K,U) \cap \mathrm{Homöo}(X,Y))$ offen ist und s_0 enthält[11]. Dann ist $U_{s_0} \times V_K$ eine offene Umgebung von (x_0, s_0). Wegen $\gamma(V_K)(K) \subseteq U$ gilt $A(V_K \times U_{s_0}) \subseteq U$.

Sei nun $A : X \times [0;1] \to Y$ eine Isotopie. Wir definieren $\gamma : [0;1] \to \mathrm{Homöo}(X,Y), s \mapsto (x \mapsto A(x,s))$. Wir müssen zeigen, daß γ stetig ist. Hierzu sei $s_0 \in [0;1]$ beliebig und $V \subseteq \mathrm{Homöo}(X,Y)$ offen mit $\gamma(s_0) \in V$. Wir dürfen annehmen, daß V von der Form $V = V(K,U)$ mit $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq Y$ offen ist[12]. Da A stetig ist, ist $A^{-1}(U)$ offen und es gilt $\{s_0\} \times K \subseteq A^{-1}(U)$. Für jedes $k \in K$ existieren daher offene $U_k \subseteq [0;1]$ und $V_k \subseteq X$ mit $s_0 \in U_k$ und $k \in V_k$ und $U_k \times V_k \subseteq A^{-1}(U)$. Da K kompakt ist und $K \subseteq \bigcup_{k \in K} V_k$, gibt es endlich viele $V_{k_1}, \dots, V_{k_r}$ mit $K \subseteq \bigcup_{i=1}^r V_{k_r}$. Dann ist $U' := \bigcap_{i=1}^r U_{k_i}$ eine offene Umgebung von s_0 mit der Eigenschaft $U' \times K \subseteq A^{-1}(V)$. Für diese gilt $\gamma(U') \subseteq V$, was zu zeigen war. □

1.4 Die Fundamentalgruppe

$\pi_1 : \underline{\mathrm{T}}\mathrm{op}, * \to \underline{\mathrm{G}}\mathrm{r}$ ist ein kovarianter Funktor. Dabei wird einem punktierten topologischen Raum (X,p) die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X,p)$ zugeordnet. Diese besteht aus allen Homotopieklassen geschlossener Wege $\gamma : [0;1] \to X$ mit *Basispunkt* $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. Die Komposition ist gegeben durch die Verknüpfung

$$\gamma\gamma' : [0;1] \to X, s \mapsto \begin{cases} \gamma(2s), & \text{falls } 0 \le s \le \frac{1}{2}, \\ \gamma'(2s-1), & \text{falls } \frac{1}{2} < s \le 1. \end{cases}$$

Es gilt $\pi_1(X,p) \cong \pi_1(X,q)$ falls p und q auf einem Weg liegen, d.h. es einen Weg $\omega : [0;1] \to X$ mit $\omega(0) = p$ und $\omega(1) = q$ gibt. In diesem Fall ist

$$\gamma \mapsto \omega^{-1}\gamma\omega$$

ein Isomorphismus.

$\pi_1(\Sigma_g)$ wird erzeugt von $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$, sofern wir Σ_g durch Verklebung der Kanten $a_1, a_1^{-1}, \dots, b_g, b_g^{-1}$ erhalten. Die Relationen zwischen diesen Erzeugern sind durch die Relation

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$$

erzeugt.

[10] Für die Implikation $\Rightarrow$ genügt es vorauszusetzen, daß Y lokalkompakt ist; die umgekehrte Implikation gilt sogar uneingeschränkt für allgemeine topologische Räume

[11] es gilt $\gamma(s_0)(K) \subseteq U$.

[12] die $V(K,U)$ bilden zwar nur eine Subbasis, aber es gilt für alle endlichen Folgen $V_1, \dots, V_r$ dieser Subbasis $f^{-1}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_r) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \cap \cdots \cap f^{-1}(V_r)$.

1.5 Schnitttheorie

Definition 1.12. Zwei Wege γ, γ' auf einer Fläche schneiden sich *transversal*, falls

(1) $\gamma([0;1]) \cap \gamma'([0;1])$ diskret (und damit endlich, da kompakt) ist und

(2) falls für eine ausreichend kleine Kreisumgebung[13] $\mathfrak{B}$ eines Schnittpunktes s die Punkte von γ und γ' auf dem Rand alternierend[14] liegen.

Sinn der Sache: nichttransversale Schnitte lassen sich *weghomotopieren*.

Definition 1.13. Seien γ, γ' orientierte Wege[15] auf einer orientierten Fläche, welche sich transversal schneiden.

a) Für ein $x \in \gamma \cap \gamma'$ unterscheiden wir dann die Orientierung der Basis in einer orientierte Kartenumgebung U (mit $x \mapsto 0$) wie in der vorigen Definition, welche durch die *positiven* Punkte von γ und γ' auf dem Rand von U gegeben ist. Je nach Orientierung dieser Basis definieren wir $i_x(\gamma, \gamma')$ als ± 1.

b) Die *algebraische* Schnittzahl ist

$$i_a(\gamma, \gamma') := \sum_{x \in \gamma \cap \gamma'} i_x(\gamma, \gamma').$$

Proposition 1.14. *Für die algebraische Schnittzahl gelten:*

a) $i_a(\gamma, \gamma') = -i_a(\gamma', \gamma)$,

b) $i_a(\gamma\gamma', \gamma'') = i_a(\gamma, \gamma'') + i_a(\gamma', \gamma'')$,

c) $i_a(\gamma, \gamma') = -i_a(\gamma^{-1}, \gamma')$,

d) $i_a(\gamma, \gamma'') = i_a(\gamma', \gamma'')$, *falls* γ *und* γ' *homotop sind.*

Beweis. Interessant ist d). Hier ist im Wesentlichen der Fall zu betrachten, falls zwei Schnittpunkte aufeinanderfallen. Dieser spaltet sich in zwei Fälle: die beiden aufeinandertreffenden Wege sind gleich oder verschieden orientiert. Fallen diese Schnitte aufeinander kann ein nichttransversaler Schnitt auftreten[16], der sich danach jedoch wieder in transversale Schnitte auflöst[17]. □

Satz 1.15. *Sei X eine orientierte Fläche und sei $H_1(X, \mathbb{Z}) := \pi_1(X)^{\mathrm{ab}}$ die Abelisierung von $\pi_1(X)$. Dann induziert i_a eine nichtausgeartete bilineare Paarung*[18]

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \times H_1(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}.$$

Bemerkung. Es sei angemerkt, daß $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ gilt.

---

[13] und damit für eine Umgebungsbasis aus solchen Kreisumgebungen.

[14] abwechselnd auftreten

[15] d.h. wir wählen auf $[0;1]$ eine Orientierung

[16] Frank: „Diese Kröte müssen wir schlucken, bei Homotopie ist das eben manchmal so.“

[17] Frank: „Die anderen haben die Augen zu und können jetzt irgendwelche Mauscheleien machen.“

[18] diese ist sogar unabhängig von der Orientierung auf X, jedoch natürlich nicht unabhängig von der Orientierung der Wege.

Beweis. Es ist die Nichtausgeartetheit zu zeigen. Hierzu wählen wir die $\mathbb{Z}$-Basis $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g$ von $H_1(X, \mathbb{Z})$, welche durch das obige Erzeugendensystem von $\pi_1(X)$ induziert wird. Dann gilt

$$i_a(\alpha_i, \alpha_j) = 0$$

und

$$i_a(\alpha_i, \beta_j) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ 1, & \text{falls } i = j. \end{cases}$$

□

Definition 1.16. Die *geometrische Schnittzahl* zweier Wege α, β ist definiert als

$$\min_{\alpha', \beta'} \{|\alpha' \cap \beta'|\},$$

wobei α' und β' die Homotopieklassen von α und β durchlaufen.

1.6 Überlagerungen

Definition 1.17. Seien X, Y topologische Räume.

a) Eine *möglicherweise verzweigte Überlagerung* ist eine stetige offene diskrete[19] Abbildung $p : Y \to X$.

b) Eine Überlagerung $p : Y \to X$ heißt *unverzweigt*, falls es für jeden Punkt $y \in Y$ eine Umgebung $U \subseteq Y$ von y gibt, so daß $p|_Y$ ein Homöomorphismus auf das Bild von p ist[20].

c) $p : Y \to X$ heißt *unverzweige unbegrenze Überlagerung* oder einfach nur *Überlagerung*, falls[21] es für jedes $x \in X$ eine Umgebung U von x gibt, so daß $p^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{i \in I} V_i$ mit paarweise disjunkten und via $p|_{V_i}$ zu U homöomorphen Umgebungen V_i der Urbilder y_i von x.

d) Ein $y \in Y$ heißt *Verzweigungspunkt* einer Überlagerung $p : Y \to X$, falls y keine Umgebung besitzt, auf welcher p injektiv ist.

Bemerkung. Für eine Überlagerung $p : Y \to X$ ist X genau dann eine Mannigfaltigkeit, wenn Y eine Mannigfaltigkeit ist. Desweiteren ist das Kompositum $p \circ q$ von zwei Überlagerungen $q : Z \to Y$ und $p : Y \to X$ eine Überlagerung. Sind q und $p \circ q$ Überlagerungen, so ist p ebenfalls eine Überlagerung (gilt *mindestens* für Mannigfaltigkeiten, allgemeiner gilt diese Implikation falls Y hausdorffsch und X lokal zusammenhängend ist[22]).

---

[19] d.h. für jedes $x \in X$ ist $f^{-1}(x)$ diskret.

[20] Eine unverzweigte Überlagerung ist also nichts anderes als ein diskreter lokaler Homöomorphismus.

[21] In a) und b) war bisher nicht von Surjektivität die Rede. Desweiteren ist anzumerken, daß eine surjektive unverzweigte Überlagerung noch keine Unbegrenzte sein muß, da die V_i alle *gleich groß* sein müssen in dem Sinne, daß sie unter p homöomorph zu U sind. Das folgt im allgemeinen noch nicht aus der Diskretheit der Urbildmengen $p^{-1}(x)$.

[22] p ist surjektiv und daher stetig und offen [Bou71, chap. I, §5.1, Proposition 1]. Sei $x \in X$ beliebig und U eine offene Umgebung von x, so daß $(p \circ q)^{-1}(x) = \dot{\bigcup}_{i \in I} V_i$ mit paarweise disjunkten, via $p \circ q$ zu U homöomorphen offenen $V_i \subseteq Z$. Dann gilt $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} q(V_i)$. Nun ist $p|_{q(V_i)}$ injektiv und offen, also ein Homöomorphismus $q(V_i) \to U$. Falls $q(V_i) \cap q(V_j) \neq \emptyset$, so gilt für die beiden Urbilder $z_i, z_j \in Z$ von x in V_i bzw. V_j, daß $p(q(z_i)) = x = p(q(z_j))$ und falls $z_i \in q(V_j)$, so folgt aufgrund der Injektivität von $p|_{q(V_j)}$, daß $q(z_i) = q(z_j)$, also $z_i = z_j$, mithin $i = j$. Damit gilt $q(z_i), q(z_j) \notin q(V_i) \cap q(V_j)$. Also ist $q(V_i) \cap q(V_j)$ via p homöomorph zu einer offenen Teilmenge $V \subseteq U$, welche x *nicht*

Definition 1.18. Seien $p : Y \to X$ eine Überlagerung und Z ein topologischer Raum, $f : Z \to X$ stetig. Ein *Lift* von f ist eine stetige Abbildung $f' : Z \to Y$, für welche $p \circ f' = f$ gilt.

Satz 1.19 (Eindeutigkeit)**.** *Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung und Z zusammenhängend. Sei $f : Z \to X$ stetig, $f_1, f_2 : Z \to Y$ Lifts, dann folgt aus $f_1(z) = f_2(z)$ für ein $z \in Z$ bereits $f_1 = f_2$.*

Beweis. Die Menge
$$M := \{z \in Z \mid f_1(z) = f_2(z)\}$$
ist offen und abgeschlossen. Für beliebiges $z \in Z$ gibt es eine Umgebung $V_i \subseteq Y$ von $f_i(z)$ und eine Umgebung $U \subseteq X$ von $f(z)$, so daß $p|_{V_i} : V_i \to U$ ein Homöomorphismus ist und wir dürfen annehmen, daß
$$V_1 \cap V_2 = \begin{cases} V_1 = V_2, & \text{falls } f_1(z) = f_2(z), \\ \emptyset, & \text{falls } f_1(z) \neq f_2(z). \end{cases}$$

Im Fall $z \in M$ ist also $W := f_1^{-1}(V_1) = f_2^{-1}(V_2)$ eine Umgebung von z, auf welcher $f_1|_W = (p|_{V_1})^{-1} \circ f = f_2|_W$ gilt. Wir haben also $W \subseteq M$. Daher ist M offen.

Falls $z \notin M$, nehmen wir an, daß es in der Umgebung $W := f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2)$ von z ein z' mit $f_1(z') = f_2(z')$ gibt. Es folgt $f_1(z') \in V_1$ und $f_2(z') \in V_2$. Also $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Daher gilt $W \subseteq Z - M$. M ist deshalb abgeschlossen. □

Satz 1.20 (Existenz 1)**.** *Es sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung. Für jeden Weg $\gamma : [0;1] \to X$, $x := \gamma(0)$ und jedes $y \in Y$ mit $p(y) = x$ existiert genau ein Lift $\tilde{g}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = y$.*

Beweis. Eindeutigkeit folgt aus dem Eindeutigkeitssatz, die Existenz durch Lifts auf kleinen Umgebungen, auf welchen p homöomorph ist. Da $[0;1]$ kompakt ist, müssen wir nur endlich viele solche *Stückchen* zusammenstöpseln. □

Satz 1.21. *Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung und seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0;1] \to X$ homotope Wege mit Lifts $\tilde{\gamma}_1$ und $\tilde{\gamma}_2$ mit $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0)$. Dann sind $\tilde{\gamma}_1$ und $\tilde{\gamma}_2$ ebenfalls homotop.*

Beweis. Lifte die Homotopie zu einer Homotopie H auf Y. Da jede Überlagerung diskret ist, sind die Abbildungen $s \mapsto H(s, 0)$ und $s \mapsto H(s, 1)$ konstant. □

Satz 1.22 (Existenz 2)**.** *Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung, Z einfach zusammenhängend*[23] *und $f : Z \to X$ stetig. Dann gibt es zu jeder Wahl $x \in X$, $y \in Y$ und $z \in Z$ mit $f(z) = p(y) = x$ genau einen Lift $f' : Z \to Y$ mit $f'(z) = y$.*

Beweis. Definiere $f'(v)$ wie folgt. Betrachte $w = f(v)$ und einen Weg γ von x nach w. Lifte γ zu einem Weg $\tilde{\gamma}$ auf Y mit $\tilde{\gamma}(0) = y$ und $\tilde{\gamma}(1) = w'$. Definiere nun $f'(v) := w' = \tilde{\gamma}(1)$. Die Wohldefiniertheit ergibt sich aus den vorigen Sätzen, da sich Homotopien liften lassen. □

Satz 1.23. *Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung mit $p(y) = x$. Dann ist $p_* : \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ injektiv.*

Beweis. Folgt direkt aus Satz 1.21. □

---

enthält. Wir zeigen, daß V auch abgeschlossen ist. Sei $t \in \overline{V} \subseteq U$, so liegen $t_i := (p|_{q(V_i)})^{-1}(t)$ und $t_j = (p|_{q(V_j)})^{-1}(t)$ im Abschluß $\overline{q(V_i) \cap q(V_j)}$. Die von den Umgebungsfiltern von t_i und t_j auf $\overline{q(V_i) \cap q(V_j)}$ induzierten Filter $\mathfrak{F}_i, \mathfrak{F}_j$ stimmen überein, denn ihr Bild ist der des Umgebungsfilters von t induzierte Filter auf V. Da Y hausdorffsch ist, folgt hieraus $t_i = t_j$, denn beide sind Grenzwerte des Filters $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_j$. Daher gilt $t \in \overline{V}$. Da X lokal zusammenhängend und daher o.E. U zusammenhängend ist, ergibt sich hieraus $V = U$, im Widerspruch zu $x \notin V$.

[23] wegzusammenhängend mit trivialer Fundamentalgruppe.

Satz 1.24 (Existenz 3). *Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung und $f : Z \to X$ stetig, Z zusammenhängend, lokal einfach wegzusammenhängend und $f_*(\pi_1(Z)) \subseteq p_*(\pi_1(Y))$. Dann existieren Lifts analog zum Existenzsatz 2.*

1.7 Universelle Überlagerungen

Definition 1.25. Seien X und Y zusammenhängend und $p : Y \to X$ eine Überlagerung. p heißt *universelle Überlagerung* von X, falls es für alle zusammenhängenden Z und alle Überlagerungen $q : Z \to X$ und alle $x \in X$, $y \in Y$ und $z \in Z$ mit $q(z) = p(y) = x$ eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $f : Y \to Z$ existiert mit $q \circ f = p$ und $f(y) = z$.

Bemerkung. Falls Y einfach zusammenhängend ist, so ist die Überlagerung $p : Y \to X$ universell.

Definition 1.26. Sei X ein topologischer Raum. Dann heißt X

a) *einfach zusammenhängend*, falls X *wegzusammenhängend* und jeder Weg in X nullhomotop ist.

b) *lokal (einfach) zusammenhängend*, falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebungsbasis gibt, welche aus (einfach) zusammenhängenden Umgebungen besteht.

c) *semilokal einfach zusammenhängen*, falls es für jedes $x \in X$ eine Umgebung gibt, in welcher jeder Weg γ nullhomotop in X ist.

Bemerkung. Falls $p : Y \to X$ eine Überlagerung ist, dann ist X semilokal einfach zusammenhängend genau dann, wenn Y semilokal einfach zusammenhängend ist.

Satz 1.27. *Ein topologischer Raum X besitzt eine universelle Überlagerung, welche einfach zusammenhängend ist, genau dann, wenn X semilokal einfach zusammenhängend ist.*

Beweis. **Existenz:** Sei $x_0 \in X$ fest. Wir definieren

$$Y := \{(x, [\gamma]_{\text{Homotopie}}) \mid x \in X, \gamma \text{ Weg von } x_0 \text{ nach } x\}$$

und $p : Y \to X$ durch $(x, [\gamma]) \mapsto x$. Auf Y definieren wir eine Topologie, indem wir zu $(x, [\gamma])$ eine Umgebungsbasis definieren. Diese bestehe aus allen $\tilde{U}$, wobei $U \subseteq X$ eine einfach zusammenhängende Umgebung von x sei und

$$\tilde{U} := \{(y, [\gamma']) \in Y \mid y \in \tilde{U} \text{ und es existiert ein Weg } \gamma'' \text{ in } U \text{ von } x \text{ nach } y \text{ mit } \gamma' = \gamma\gamma''\}.$$

Eine solche Topologie existiert, ist eindeutig und Y ist damit einfach zusammenhängend und p eine Überlagerung. Denn:
Y ist ein topologischer Raum[24]: seien o.E. U eine offene Umgebung von x, so daß jeder Weg in U nullhomotop in X ist. Für jedes $(y, [\gamma']) \in \tilde{U}$ existiert dann eine Umgebung $V \subseteq U$ von y. In dieser ist ebenfalls jeder Weg nullhomotop in X und es gilt $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$. Ebenfalls gilt für zwei Umgebungen U und V von x, in welchen jeder Weg nullhomotop in X ist, daß $U \cap V$ die gleiche Eigenschaft hat und daher $(U \cap V)\tilde{} \subseteq \tilde{U} \cap \tilde{V}$. Das zeigt die Existenz und die Eindeutigkeit der Topologie [Bou71, chap. I, §1, no. 2, Proposition 2].

[24] d.h. unsere Topologie ist wohldefiniert.

Y ist lokal homöomorph zu X: sei $(x, [\gamma]) \in Y$ beliebig und $\tilde{U}$ eine Umgebung von x wie oben. Dann ist $p|_{\tilde{U}}$ offensichtlich injektiv und hat das Bild U. Desweiteren handelt es sich hierbei sogar um einen Homöomorphismus. Denn für jedes offene $V \subseteq U$ ist $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$ offen und jede offene Umgebung $\tilde{V} \subseteq \tilde{U}$ ist von dieser Form.
Y ist eine Überlagerung: Ist $(x, [\gamma'])$ ein weiteres Urbild von x unter p ist, so sind die U entsprechenden Umgebungen dieser beiden Punkte offensichtlich disjunkt. Also haben wir es mit einer *Überlagerung* zu tun.
Y ist wegzusammenhängend: es seien $(x_0, 0)$ und $(y, [\beta])$ beliebig auf Y. Dann ist β ein Weg von x_0 nach y und die Abbildung $\tilde{\beta} : s \mapsto (\beta(s), [\beta_s])$ wobei $\beta_s(t) := \beta(st)$ ist ein Weg von $(x_0, 0)$ nach $(y, [\beta])$ aufgrund der Definition der Topologie auf Y. Denn ist $\tilde{U}$ eine Umgebung eines $\tilde{\beta}(s)$, $U \subseteq X$ o.E. eine Umgebung von $\beta(s)$, in welcher jeder Weg nullhomotop in X ist, dann gibt es eine Umgebung $V \subseteq U$ von s mit $\beta(V) \subseteq U$. Wir haben dann für $v \in V$ die Relation $\tilde{\beta}(v) = (\beta(v), [\beta_v]) = (\beta(v), [\beta'_v \beta_s(v)]) \in \tilde{V}$ mit dem Weg $\beta'_v : t \mapsto \beta((1-s)t + s)$.
Y ist einfach zusammenhängend: sei zunächst $\tilde{\alpha} : [0; 1] \to Y$ ein Weg mit Startpunkt $(x_0, 0) \in Y$ und Endpunkt $(x, [\gamma]) \in Y$. Wir schreiben $\tilde{\alpha}(s) = (\alpha(s), [\gamma_s])$. Dann ist $\alpha = p_*(\tilde{\alpha}) = p \circ \tilde{\alpha}$ ein Weg von x_0 nach x in X, γ ebenso. Wir behaupten, daß α und γ homotop sind. Hierzu genügt es zu zeigen, daß $\alpha_s : t \mapsto \alpha(ts)$ und γ_s für $s \in [0; 1]$ homotop sind. Hierzu wählen wir eine Umgebung von x_0, in welcher jeder Weg nullhomotop in X ist. Dann gilt für ein ausreichend kleines s für die Wege $\alpha_s, \gamma_s \subseteq U$ (hierbei müssen wir γ_s möglicherweise durch einen anderen Repräsentanten aus $[\gamma_s]$ ersetzen), denn $\tilde{\alpha}$ ist *stetig*. Deshalb ist $\alpha_s \gamma_s^{-1}$ nullhomotop, weswegen α_s und γ_s homotop sind. Wir dürfen daher $\alpha_s = \gamma_s$ für ausreichend kleines $s > 0$ annehmen. Indem wir $(x_0, 0)$ durch $(\alpha_s(1), 0)$ ersetzen, sehen wir, daß die Menge der $s \in [0; 1]$ mit $[\alpha_s] = [\gamma_s]$ eine offene Zusammenhangskomponente der Form $[0; \varepsilon)$ besitzt (falls $S \neq [0; 1]$). Aufgrund der Stetigkeit von $\tilde{\alpha}$ besteht γ_ε aus $\gamma_{\varepsilon-\delta}$, wobei $\delta > 0$ klein, so daß $\gamma_\varepsilon \gamma_{\varepsilon-\delta}^{-1}$ ganz in einer Umgebung U von $(\alpha(\varepsilon), [\gamma_\varepsilon])$ liegt, in welcher jeder geschlossene Weg nullhomotop in X ist. Aus dem selben Stetigkeitsgrund dürfen wir annehmen, daß $\alpha_\varepsilon \alpha_{\varepsilon-\delta}$ in U liegt. Der Weg

$$\alpha_\varepsilon \alpha_{\varepsilon-\delta} (\gamma_\varepsilon \gamma_{\varepsilon-\delta}^{-1})^{-1} = \alpha_\varepsilon \gamma_\varepsilon^{-1}$$

ist dann nullhomotop, weswegen α_ε und β_ε homotop sind, was zu zeigen war. Daher gilt $[\alpha] = [\gamma]$. Ist nun $\tilde{\alpha}$ ein geschlossener Weg, d.h. $x = x_0$ und $[\gamma] = 0$, so folgt $[\alpha] = [\gamma] = 0$. Der Weg $\tilde{\alpha}$ ist also ein Lift eines nullhomotopen Weges auf X und daher selbst nullhomotop.
Y ist eine universelle Überlagerung: Existenzsatz 2.
Semilokal einfach zusammenhängend: Sei $p : Y \to X$ eine einfach zusammenhängende universelle Überlagerung. Zu jedem $x \in X$ existiert dann eine Umgebung $U \subseteq Y$, so daß $p(U)$ eine zu U homöomorphe Umgebung von x ist. Falls γ ein geschlossener Weg in U ist, ist der Lift $(p|_U)^{-1}(\gamma)$ ebenfalls ein *geschlossener* Weg. Da Y einfach zusammenhängend ist, ist dieser nullhomotop via einer Homotopie H. Die Homotopie $p \circ H$ zeigt, daß γ ebenfalls nullhomotop ist. Deshalb ist X semilokal einfach zusammenhängend. $\square$

1.8 Gruppenoperationen

Definition 1.28. Eine Gruppe G operiert *eigentlich*[25] *diskontinuierlich* auf einem topologischen Raum X, falls es für jedes $x \in X$ eine Umgebung U gibt, so daß die Menge

$$\{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\}$$

endlich ist.

Bemerkung. Falls G eigentlich diskontinuierlich und frei auf einem *Hausdorffraum* X operiert, so ist X eine Überlagerung von $G\backslash X$. Falls G nicht frei operiert, handelt es sich hierbei um eine möglicherweise verzweigte Überlagerung[26].

Definition 1.29. Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung. Ein Homöomorphismus $f : Y \to Y$ heißt *Decktransformation*, falls $p \circ f = p$ (d.h. f ist *spurtreu*). Es bezeichne $\mathrm{Deck}(p)$ die Menge der Decktransformationen zu p.

Bemerkung. $\mathrm{Deck}(p)$ ist eine Gruppe, welche eigentlich diskontinuierlich[27] auf Y operiert. Diese Operation ist frei[28], falls Y zusammenhängend ist.

Satz 1.30. *G operiere frei und eigentlich diskontinuierlich auf einem* zusammenhängenden *Raum Y. Für die Überlagerung $p : Y \to G\backslash Y$ gilt kanonisch* $\mathrm{Deck}(p) \cong G$.

Beweis. $\phi : G \to \mathrm{Deck}(p), g \mapsto y \mapsto gy$ ist ein offensichtlich injektiver Gruppenhomomorphismus. Dieser ist auch surjektiv, da ein beliebiges $f \in \mathrm{Deck}(p)$ mit der von G auf Y induzierten Äquivalenzrelation verträglich ist. Insbesondere gibt es für jedes $y \in Y$ ein $g_y \in G$ mit $g_y y = f(y)$.

[25] diese Terminologie ist etwas verwirrend, da eine eigentlich diskontinuierliche Operation keineswegs eine eigentliche Operation sein muß. Denn operiert G eigentlich (d.h. ist $G \times X \to X$ eigentlich), so ist $G\backslash X$ stets hausdorffsch [Bou71, chap. III, §4, no. 2, Proposition 3]. In unserem Fall ist $G\backslash X$ jedoch genau dann hausdorffsch, falls zusätzlich zu je zwei G-inäquivalenten $x, y \in X$ Umgebungen U und V existieren mit $gU \cap gV = \emptyset$ für alle $g \in G$. Ist G hausdorffsch und X lokalkompakt, dann folgt aus eigentlich diskontinuierlich auch eigentlich [Bou71, chap. III, §4, no. 5, Théorème 1]. Eine eigentliche Operation einer hausdorffschen Gruppe G auf einem lokalkompakten Raum ist hingegen genau dann diskontinuierlich, falls G diskret ist [Bou71, chap. III, §4, no. 5, Théorème 1], siehe auch Satz 1.37 unten. Schließlich sei noch erwähnt, daß eine *diskrete* Gruppe G genau dann eigentlich auf einem Hausdorffraum X operiert, falls es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ Umgebungen U und V gibt, so daß die Menge der $\sigma \in G$ mit $\sigma U \cap V \neq \emptyset$ *endlich* ist [Bou71, chap. III, §4, no. 4, Proposition 7 et aussi no. 5, Théorème 1, Remarque]. In diesem Sinne ist eigentlich diskontinuierlich nicht so weit von eigentlich entfernt. Insbesondere impliziert in diesem Fall eigentlich auch eigentlich diskontinuierlich. Das ist für uns entscheidend, da wir auf diese Weise eigentlich diskontinuierliche Operationen erhalten, indem wir diskrete Untergruppen Γ einer eigentlich operierenden Gruppe G betrachten (in unserem Fall $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ bzw. $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$).

[26] Zunächst sei angemerkt, daß alle Stabilisatoren *endlich* sind. $p : X \mapsto G\backslash X$ ist stets offen, denn ist $U \subseteq X$ offen, so ist GU offen und damit $p(U) = G\backslash GU$ ebenfalls. Ist $G\backslash Gx \in G\backslash X$ ein beliebiger Punkt, dann ist $p^{-1}(G\backslash Gx) = Gx$. Wir wählen eine Umgebung U von x, so daß $M := \{g \in G \mid gU \cap U \neq \emptyset\}$ endlich ist. Mit M' bezeichnen wir die $g \in M$ mit $gx \neq x$. Dann existieren zu jedem $g \in M'$ Umgebungen V_g und W_g von x und gx mit $V_g \cap W_g = \emptyset$. Dann ist $U' := U \cap (\bigcap_{g \in M'} V_g \cap g^{-1} W_g)$ eine Umgebung von x. Für diese gilt $U' \cap gU' = \emptyset$ falls $gx \neq x$. Deshalb ist p *diskret*. p ist in jedem Fall also eine möglicherweise verzweigte Überlagerung. x ist genau dann ein Verzweigungspunkt, falls es in U' keine Umgebung U'' von x gibt, so daß alle $y \in U''$ den gleichen Stabilisator wie x haben. Der Stabilisator eines $y \in U'$ ist stets im Stabilisator von x enthalten. Sind desweiteren alle Stabilisatoren *trivial*, erhalten wir also, daß alle Stabilisatoren von Punkten in U' trivial sind. Deshalb ist die Einschränkung $p|_{U'}$ injektiv und offen, also ein Homöomorphismus auf das Bild und die Eigenschaften von U' zeigen insbesondere, daß p eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung ist.

[27] da p eine Überlagerung ist: wähle für $y \in Y$ eine Umgebung V, so daß $p|_V \to p(V)$ ein Homöomorphismus ist. Bezeichne desweiteren K die Vereinigung der Zusammenhangskomponenten von Y, welche zu V disjunkt sind. Mit $U := K \cup V$ gilt dann $f(U) \cap U \neq \emptyset$ genau dann, wenn $f(V) = V$ und $f(K) \subseteq K$. Das ist nur möglich, wenn $f = \mathrm{id}_Y$.

[28] dank Liftungseigenschaft, Satz 1.19.

Die g_y sind hierdurch bereits eindeutig bestimmt. Wir wählen $g := g_y$ für ein y und betrachten $h : Y \to Y, x \mapsto g^{-1}f(x)$. Dann gilt $h \in \mathrm{Deck}(p)$ und $h(y) = y$. Satz 1.19 besagt, daß $h = \mathrm{id}_Y$, denn beides sind Lifts von id_X. □

Satz 1.31. *Sei Y einfach zusammenhängend und $p : Y \to X$ eine Überlagerung. Dann gilt $\mathrm{Deck}(p) \cong \pi_1(X)$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $\pi_1(X)$ eine Untergruppe der Decktransformationen erzeugt und daher frei und eigentlich diskontinuierlich auf Y operiert. Denn via Konstruktion der universellen Überlagerung Y wie oben (Y ist o.E. eine solche), operiert $\pi_1(X)$ via $\delta(x, [\gamma]) := (x, [\gamma\delta])$ für $[\delta] \in \pi_1(X)$. Diese Operation ist offensichtlich frei und da $p \circ [\delta] = p$, handelt es sich hierbei auch um Decktransformationen. Die Operation ist also eigentlich diskontinuierlich. Desweiteren gilt $X \cong \pi_1(X)\backslash Y$ denn $(x_1, [\gamma_1]), (x_2, [\gamma_2]) \in Y$ sind genau dann $\pi_1(X)$-äquivalent, wenn $x_1 = x_2$ und wenn es ein $[\delta] \in \pi_1(X)$ gibt mit $[\gamma_1] = [\gamma_2\delta]$. Letzteres ist offensichtlich stets der Fall: wir wählen $\delta := \gamma_1\gamma_2^{-1}$. Deshalb gilt $X \cong \pi_(X)\backslash Y$ wie behauptet. Zuguterletzt impliziert dies bereits $\pi_(X) = \mathrm{Deck}(p)$ nach Satz 1.30 (die Begründing hier wie dort lautet: denn jedes $f \in \mathrm{Deck}(p)$ operiert *frei* auf Y). □

1.9 Galoistheorie für Überlagerungen

Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung und Y einfach zusammenhängend. Dann stehen die Überlagerungen $q : Z \to X$ mit Z zusammenhängend in 1-zu-1-Korrespondenz mit den Untergruppen von $\pi_1(X) \cong \mathrm{Deck}(p)$. Insbesondere gilt $\pi_1(Z) \cong \mathrm{Deck}(f)$ wenn $f : Y \to Z$ mit $q \circ f = p$ und $Z \cong \mathrm{Deck}(f)\backslash Y$. Desweiteren ist $\pi_1(Z)$ genau dann normal in $\pi_1(X)$ (via q_*), falls $\mathrm{Deck}(q)\backslash Z \cong X$ gilt. In diesem Fall gilt $\mathrm{Deck}(q) \cong \pi_1(X)/\pi_1(Z)$.

1.10 Die Hyperbolische Ebene

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ operiert auf Auf $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ via Möbiustransformation:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Es sei darauf hingewiesen, daß $-1 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ trivial operiert, und daß die Operation von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ auf $\mathbb{H}$ *effektiv*[29] und *transitiv* ist. $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ ist der Stabilisator von i in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und dieser ist wegen $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *kompakt*. Desweiteren haben wir den folgenden

Satz 1.32. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *operiert* eigentlich[30] *auf* $\mathbb{H}$.

Beweis. Sei K ein Kompaktum auf $\mathbb{H}$. Für beliebiges $x + iy \in \mathbb{H}$ gilt

$$\begin{pmatrix} y^{1/2} & y^{-1/2}x \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} i = \frac{y^{1/2}i + y^{-1/2}x}{y^{-1/2}} = x + iy.$$

[29] d.h. der Schnitt aller Stabilisatoren ist trivial.

[30] d.h. daß die Abbildung $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *eigentlich* ist. Da $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ lokalkompakt und $\mathbb{H}$ hausdorffsch ist, ist dies gleichbedeutend damit, daß für je zwei Kompakta $K, L \subseteq \mathbb{H}$ die Menge $\{\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid \sigma K \cap L \neq \emptyset\}$ kompakt in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist [Bou71, chap. III, §4, no. 5, Théorème 1]. Es ist sogar hinreichend, nur den Fall $K = L$ zu betrachten und die *relative* Kompaktheit der fraglichen Menge nachzuweisen. Wir zeigen trotzdem die Kompaktheit.

Dann ist $A : \mathbb{H} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), x+iy \mapsto \begin{pmatrix} y^{1/2} & y^{-1/2}x \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}$ stetig und es gilt

$$\sigma K \cap K \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; \exists z \in K : \sigma z \in K \;\Leftrightarrow\; \exists z \in K : \sigma A(z) i \in K \;\Leftrightarrow\; \exists z, z' \in K : \sigma A(z) i \in A(z') i \;\Leftrightarrow$$
$$\exists z, z' \in K : A(z')^{-1} \sigma A(z) i = i \;\Leftrightarrow\; \exists z, z' \in K : A(z')^{-1}\sigma A(z) \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \;\Leftrightarrow$$
$$\exists z, z' \in K : \sigma \in A(z') \,\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) A(z)^{-1} \;\Leftrightarrow\; \sigma \in A(K)\,\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) A(K)^{-1}.$$

Daher ist die Menge

$$\{\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid \sigma K \cap K \neq \emptyset\} = A(K)\,\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) A(K)^{-1}$$

als stetiges Bild des Kompaktums $A(K) \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \times A(K)$ *kompakt*[31]. □

Korollar 1.33. *Es gilt topologisch*[32] $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\,\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{H}$.

Definition 1.34. Ein Element[33] $\sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) - \mathbb{C}^\times$ mit o.E. $\det \sigma = 1$ heißt

(i) *elliptisch*, falls $\mathrm{Tr}\,\sigma \in \mathbb{R}$ und $|\mathrm{Tr}\,\sigma| < 2$,

(ii) *hyperelliptisch*, falls $\mathrm{Tr}\,\sigma \in \mathbb{R}$ und $|\mathrm{Tr}\,\sigma| > 2$,

(iii) *parabolisch*, falls $\mathrm{Tr}\,\sigma \in \mathbb{R}$ und $|\mathrm{Tr}\,\sigma| = 2$,

(iv) *loxodromisch*, falls $\mathrm{Tr}\,\sigma \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Für $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) - \{\pm 1\}$ ist σ

(i) *elliptisch*, falls σ einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $z \in \mathbb{H}$ besitzt[34],

(ii) *hyperelliptisch*, falls σ zwei verschiedene Fixpunkte auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ besitzt[35],

(iii) *parabolisch*, falls σ genau einen Fixpunkt auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ besitzt[36],

(iv) niemals *loxodromisch*.

Auf $\mathbb{H}$ definieren wir ein *Längenmaß* durch

$$L(\gamma) := \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))} dt$$

[31] $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist kompakt.

[32] dies ist nicht selbstverständlich, denn im allgemeinen ist diese Abbildung nur *stetig*, aber nicht *homöomorph*. Die Homöomorphie ergibt sich aus der Tatsache, daß eine *eigentliche* Operation vorliegt [Bou71, chap. III, §4, no. 2., Proposition 4 c)]. Direkt ist dies natürlich über den stetigen, durch A induzierten Schnitt einzusehen.

[33] Es läßt sich analog zu Satz 1.32 zeigen, daß $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times$ und $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$ eigentlich auf $\mathbb{C}$ operieren, denn Stabilisatoren sind in diesen Fällen ebenfalls stets kompakt und mit etwas Glück läßt sich ein stetiger Schnitt analog zu A konstruieren (bspw. durch Verklebung zweier Kopien von $\mathbb{H}$).

[34] da $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ der Stabilisator von i ist und die Operation transitiv, ist σ also genau dann elliptisch, falls es zu einem $\tau \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) - \{\pm 1\}$ konjugiert ist.

[35] d.h. σ ist zu $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ mit $\lambda > 1$ konjugiert.

[36] d.h. σ ist zu $\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ konjugiert.

für jeden stückweise glatten Weg γ in $\mathbb{H}$. Zu je zwei verschiedenen Punkten existiert dann eine eindeutig bestimmte Geodätische, welche diese verbindet. Wir erhalten eine *Metrik* durch

$$d(z,w) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ ist Weg von } z \text{ nach } w\}.$$

Diese induziert auf $\mathbb{H}$ die gleiche Topologie wie die euklidische Metrik[37]. Daher operiert $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ „immernoch" eigentlich auf $\mathbb{H}$. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß die euklidische Metrik und die Metrik d *verschiedene* uniforme Strukturen induzieren[38]. Es stellt sich heraus, daß $\mathbb{H}$ bezüglich d sogar *vollständig* ist.

Satz 1.35. *Für die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien der hyperbolischen Ebene* $\mathbb{H}$ *gilt* $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Beweis. Bei einer Möbiustransformation haben wir drei Wünsche frei[39]. Jede Möbiustransformation ist offensichtlich eine orientierungserhaltende Isometrie. Zuguterletzt operiert $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ effektiv auf $\mathbb{H}$. □

Rechenregel: Seien $z, w \in \mathbb{H}$ und $z^*, w^* \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ die Endpunkte der Geodätischen durch z, w (d.h. die Endpunkte des Halbkreises durch z, w). Dann gilt

$$d(z,w) = \log \frac{w - z^*}{w^* - z} \frac{z - w^*}{w^* - w}.$$

Idee: das Doppelverhältnis ist invariant unter Möbiustransformationen.

1.11 Fuchssche Gruppen

Definition 1.36. Eine diskrete Untergruppe Γ von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ heißt *Fuchssche Gruppe.*

Satz 1.37. *Eine Untergruppe* Γ *von* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ *ist genau dann Fuchssch, wenn* Γ *eigentlich diskontinuierlich auf* $\mathbb{H}$ *operiert.*

Beweis. Sei Γ Fuchssch[40]. Dann ist Γ als diskrete Gruppe eine lokalkompakte Gruppe und daher vollständig[41] [Bou71, chap. III, §3, no. 3, Proposition 4, Corollaire 1], also insbesondere abgeschlossen[42] in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ [Bou71, chap. II, §3, no. 4, Proposition 8]. Sei K eine kompakte Umgebung von $z \in \mathbb{H}$. Die Menge[43]

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma K \cap K \neq \emptyset\} = \{\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid \sigma K \cap K \neq \emptyset\} \cap \Gamma$$

[37] denn hyperbolische Kreise enthalten stets euklidische Kreise und umgekehrt: sei K ein hyperbolischer Kreis. Wir dürfen annehmen, daß K in der Poincaré'sche Kreisscheibe liegt und Mittelpunkt 0 hat. Dann sind die hyperbolischen Isometrien mit Fixpunkt 0 gerade die Rotationen um 0 (modulo ± 1, Satz 1.35; der Stabilisator in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist ja konjugiert zu $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$). K ist invariant unter diesen Rotationen und deshalb ein euklidischer Kreis.

[38] insbesondere ist der Begriff der Cauchyfolge *nicht* der gleiche!

[39] modulo Orientierung.

[40] Wir könnten direkt an [Bou71, chap. III, §4, no. 5, Théorème 1, Remarque] appelieren.

[41] das ist *nicht* selbstverständlich.

[42] das ist ein nichttrivialer Punkt. Wäre Γ nicht abgeschlossen, müßte $K \cap \Gamma$ nicht kompakt sein (bspw. ist $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap [0;1]$ nicht kompakt, obwohl $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ diskret ist.

[43] stand im Seminar $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma z \in K\} = \{\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid \sigma z \in K\} \cap \Gamma$ an der Tafel? Das wäre noch nicht hinreichend.

ist dann eine kompakte Teilmenge von Γ, da Γ abgeschlossen und $\{\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid \sigma K \cap K \neq \emptyset\}$ kompakt ist[44]. Letzteres ergibt sich daraus, daß $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *eigentlich*[45] auf $\mathbb{H}$ operiert [Bou71, chap. III, §4, no. 5, Théorème 1]. Da Γ diskret ist, ist die besagte Menge endlich. Insbesondere ist die Operation *eigentlich diskontinierlich*[46].

Sei nun Γ nicht diskret. Dann existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus paarweise verschiedene $a_n \to 1$. Dann konvergiert für jedes $z \in \mathbb{H}$ die Folge $a_n z$ gegen z. Daher existieren in jeder Umgebung U von z unendlich viele Elemente $a_n z$, weswegen die Menge

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U \cap U \neq \emptyset\}$$

nicht endlich sein kann. Also operiert Γ *nicht* eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$. □

Proposition 1.38 (Aufgabe 31, 32). *Für alle $\sigma, \tau \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) - \{\pm 1\}$ gilt $\sigma\tau = \tau\sigma$ genau dann, wenn σ und τ die gleichen Fixpunkte haben. Insbesondere ist jede abelsche Fuchssche Gruppe Γ zyklisch.*

Beweis. Sei $\sigma\tau = \tau\sigma$ und $z \in \overline{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein Fixpunkt von σ. Dann gilt $\sigma\tau z = \tau\sigma z = \tau z$. Daher ist τz ein Fixpunkt von σ. Hat σ nur einen Fixpunkt, so folgt, daß τ ebenfalls den Fixpunkt z hat und dieser ist der einzige Fixpunkt von τ. Denn falls x ein weiterer Fixpunkt von τ ist, so folgt analog, daß σx ebenfalls ein Fixpunkt von τ ist. Dieser muß von z verschieden sein, weswegen σ einen weiteren Fixpunkt aufweisen müsste. Nun ist $\sigma x = z$ unmöglich, weswegen $\sigma x = x$, σ und τ haben also gleich viele Fixpunkte[48] und im Fall eines Fixpunktes, stimmen diese überein, was wir bereits gesehen haben. Falls σ und τ nun je zwei Fixpunkte haben und diese nicht gleich sind, so permutiert σ die beiden Fixpunkte von τ. Dann hat σ^2 mindestens die Fixpunkte wie σ und τ als Fixpunkte. Daher gilt $\sigma^2 = \pm 1$. Also ist σ elliptisch, da von endlicher Ordnung und hat nur einen Fixpunkt, ein Widerspruch.

Sei Γ nun eine abelsche Fuchssche Gruppe. Dann ergibt sich aus der Überlegung, daß Γ eine diskrete Untergruppe einer Gruppe $G \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist, wobei einer der folgenden Fälle eintritt:

(i) G ist der Stabilisator eines $z \in \mathbb{H}$ (elliptischer Fall),

(ii) G ist der Stabilisator eines $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (parabolischer Fall),

(iii) $\exists x, y \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $G = \{\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid \sigma(x) = x, \sigma(y) = y\}$ (hyperbolischer Fall).

Da G stets abelsch ist, ergibt sich direkt, daß Elemente mit gleichen Fixpunkten kommutieren. Zurück zu Γ. In ersterem Fall gilt $G \cong \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \{\zeta \in \mathbb{C}^\times \mid |\zeta| = 1\}$, weswegen Γ als diskrete Untergruppe der kompakten Gruppe G endlich sein muß und damit zyklisch, da Γ eine endliche Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$ ist. In den letzten beiden Fällen gilt $G \cong \mathbb{R}$ und jede diskrete Untergruppe von $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^\times \cong \mathbb{R}$) ist trivial oder isomorph zu $\mathbb{Z}$, also ebenfalls zyklisch, was zu zeigen war. □

[44] [**?** , chap. I, §9, no. 3, Proposition 2].

[45] Im Seminar wurde genau an dieser Stelle (mehr oder weniger) analog zum Beweis von Satz 1.32 gezeigt, daß $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ eigentlich operiert.

[46] Alternative Argumentation: Da $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$ eigentlich operiert, operiert auch Γ eigentlich auf $\mathbb{H}$, denn Γ abgeschlossen ist [Bou71, chap. II, §4, no. 1, Exemple 1] (bzw. da denn $\Gamma \times X$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times X$, weswegen die Operation eigentlich ist [Bou71, chap. I, §10, no. 1, Proposition 5, Corollaire 1]). Daher ist für eine beliebige *kompakte* Umgebung K von $z \in \mathbb{H}$ die Menge $\{\sigma \in \Gamma \mid \sigma K \cap K \neq \emptyset\}$ eine kompakte[47] Teilmenge von Γ und als solche *endlich*.

[48] sie haben ja mindestens einen und höchstens zwei.

1.12 Hyperbolische Flächen

Definition 1.39. Eine *hyperbolische Fläche* ist ein Hausdorffraum S mit einem Atlas $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$, $\phi_i : U_i \to V_i$ homöomorph und $V_i \subseteq \mathbb{H}$ offen, so daß für alle $i, j \in I$ die Abbildung $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : V_i \cap V_j \to V_i \cap V_j$ eine *hyperbolische Isometrie* ist.

Beispielsweise ist jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{H}$ eine hyperbolische Fläche.
Bemerkung: Jedes Σ_g mit $g \geq 2$ hat Struktur als hyperbolische Fläche. Idee: zerschneide Σ_g wie üblich, bette das Resultat in $\mathbb{H}$ ein und wähle die zu verklebenden Kanten als Geodätische gleicher Länge[49]. Desweiteren müssen die hyperbolischen Winkel zwischen diesen Kanten als Summe 2π ergeben. Der stetige Zusammenhang zwischen hyperbolischem Flächeninhalt und den Winkeln[50] zeigt, daß das stets möglich ist.
Bemerkung: Jede hyperbolische Fläche hat eine hyperbolische Metrik: messe Länge von Wegen *im kleinen*, d.h. lokal in den U_i. In den U_i haben wir die hyperbolische Metrik von $\mathbb{H}$ (das funktioniert, da die Kartenwechsel isometrisch sind). Da jeder Weg kompakt ist, läßt sich jeder Weg durch *endlich* viele U_i überdecken und hat daher stets endliche Länge. *Geodätische* sind die Wege, welche in den überdeckenden U_i Geodätische sind.
Achtung: Die Länge einer Geodätischen zwischen zwei Punkten muß nicht *minimal* sein. Insbesondere sei angemerkt, daß *geschlossene* Geodätische existieren können.

Definition 1.40. Eine hyperbolische Fläche S heißt *vollständig*, falls sie als metrischer Raum vollständig ist, d.h. falls jede (hyperbolische) Cauchyfolge einen Grenzwert hat[51].

Beispielsweise $\mathbb{H}$ ist vollständig[52] und Σ_g ebenfalls, da letzteres kompakt ist.

Lemma 1.41. *In einer vollständigen hyperbolischen Fläche S kann jede Geodätische beliebig (aber eindeutig) verlängert werden*[53].

Beweis. Wähle Kartenumgebung U eines Endpunktes; letzterer existiert, da S vollständig ist. In U läßt sich der Weg dann eindeutig verlängern. □

Satz 1.42 (hyperbolischer Uniformisierungssatz)**.** *Jede einfach zusammenhängende vollständige hyperbolische Fläche ist isometrisch isomorph zu $\mathbb{H}$.*

Beweis. Konstruiere zueinander inverse abstandserhaltende, d.h. isometrische, Abbildungen $E : \mathbb{H} \to S$ und $D : S \to \mathbb{H}$. Wähle $x_0 \in S$ und eine Kartenumgebung $\phi : U \to \mathbb{H}$ von x_0 mit $\phi(x_0) = z_0$.

1) Sei $z \in \mathbb{H}$ beliebig. Betrachte die eindeutige hyperbolische Geodätische γ_z von z_0 nach z. Dann ist $\phi^{-1}(\phi(U) \cap \gamma_z)$ ist dann ein Stück einer Geodätischen c_z auf S, welche wir nach dem vorigen Lemma eindeutig verlängern können. Sei $E(z)$ der Punkt auf c_z mit $d_S(z_0, E(z)) = d_{\mathbb{H}}(z_0, z)$. Dann ist E eine Isometrie[54].

[49] lege bspw. den „Mittelpunkt“ in den „Mittelpunkt“ der Poincaré'sche Kreisscheibe etc.
[50] große Winkelsumme $\Leftrightarrow$ kleine Fläche
[51] Genau genommen erhalten wir dank dieser Metrik eine uniforme Struktur auf S. Da S eine abzählbare Basis hat, genügt es, Cauchy*folgen* zu berücksichtigen, anstatt allgemeine Cauchy*filter*.
[52] $\mathbb{H}$ ist im euklidischen *nicht* vollständig! Das zeigt sehr schön, daß Vollständigkeit nicht nur von der Topologie allein abhängt.
[53] das ist *nicht* im Sinne der Länge der Geodätischen zu verstehen (bspw. sind geschlossene Geodätische beliebig verlängerbar).
[54] zeige Unabhängigkeit von E vom Basispunkt x_0 unter der Zusatzbedingung $x_0 \mapsto z_0$

2) $D|_U := \phi$. Für $x \in S - U$ wähle Weg c in S von x_0 nach x. Überdecke c_s mit Kartenumgebungen $(U_1, \phi_1), \ldots, (U_n, \phi_n)$ $(U_0 = U,\ \phi_0 = \phi)$, so daß $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ zusammenhängend ist (und c_s die U_i nacheinander durchläuft). Wähle weiter $x_i + 1 \in U_i \cap U_{i+1}$ so daß $x_{i+1} \in c_s$ und $c_s|_{[}x_i, x_{i+1}] \subseteq U_{i+1}$. Ohne Einschränkung sei $\phi_1|_{U \cap U_1} = \phi|_{U \cap U_1}$. Genauso $\phi_{i+1}|_{U_i \cap U_{i+1}} = \phi_i|_{U_i \cap U_{i+1}}$. Setze schließlich $D(x) := \phi_n(x)$. Dann ist D unabhängig von all den beliebigen Auswahlmöglichkeiten für $U_1, \ldots, U_n$, $\phi_1, \ldots, \phi_n$ und $x_0, \ldots, x_n$, d.h. D ist wohldefiniert. Desweiteren hängt D nur von der Homotopieklasse von c ab. Andererseits ist S einfach zusammenhängend.

3) Noch zu zeigen: $D \circ E = 1$ nach Konstruktion und $E \circ D = 1$, stimmt auf Bild(E) und es bleibt zu zeigen, daß das Bild von E offen und abgeschlossen ist. Offen ist klar, da es lokal aussieht wie eine offene Kreisscheibe in $\mathbb{H}$ und abgeschlossen folgt ebenfalls aus diesem Faktum, da eine Teilmenge von $\mathbb{H}$ genau dann abgeschlossen ist, wenn jede Cauchyfolge in ihr konvergiert[55].

□

Klar: $p : Y \to X$ Überlagerung, X hyperbolische Fläche, dann existiert eine eindeutig bestimmte Struktur einer hyperbolischen Fläche auf Y, welche mit p verträglich ist. Ist X vollständig, dann ist Y ebenfalls vollständig.

Folge:

a) Jede vollständige hyperbolische Fläche S hat die universelle Überlagerung $p : \mathbb{H} \to S$.

b) Die Decktransormationsgruppe Deck(p) zu dieser Überlagerung ist eine Fuchssche Gruppe.

c) Deck(p) besteht nur aus hyperbolischen Elementen (bis auf die Identität).

Konstruktion einer hyperbolischen Struktur im Fall einer gelochten Fläche: imitiere die alte Konstruktion und füge für jedes Loch eine Spitze hinzu. Mit dieser Konstruktion erhalten wir eine *vollständige* hyperbolische Fläche[56].

Satz 1.43. *Sei S eine vollständige hyperbolische Fläche ($\Sigma_{g,n}$, d.h. Σ_g minus n Punkte), α geschlossener Weg auf S („wesentlich“)[57], dann existiert eine eindeutig bestimmte Geodätische β, welche zu α (frei)[58] homotop ist.*

Beweis. Sei $p : \mathbb{H} \to S$ die universtelle Überlagerung, $\tilde{\alpha}$ ein Lift von α (eindeutig modulo Startpunkt). Wähle ein $\sigma \in$ Deck(p), welches den Anfang auf den Endpunkt abbildet. Dann erhalten wir durch Verkettung von $\tilde{\alpha}$ mit $\sigma(\tilde{\alpha})$ einen längeren Weg, etc. σ ist hyperbolisch und die Verlängerung des Weges konvergiert gegen die beiden Fixpunkte x, y von σ. Von x nach y verläuft eine Geodätische $\tilde{\beta}$. Diese ist zu $\tilde{\alpha}$ homotop und das Bild $\beta := p(\tilde{\beta})$ ist dann eine zu α homotope Geodätische (denn σ operiert analog auf $\tilde{\beta}$).

Eine andere kommt nicht in Frage, denn ein Lift $\tilde{\gamma}$ einer zu α homotopen Geodätischen hat o.E. ebenfalls die Endpunkte x, y. □

[55] denn $\mathbb{H}$ ist vollständig, weswegen jeder abgeschlossene Teilraum ebenfalls vollständig ist. Andererseits ist ein vollständiger Teilraum auch stets abeschlossen [Bou71, chap. II, §3, no. 4, Proposition 8]. Genau hier geht die Vollständigkeit von D ein: dank ihr dürfen wir uns auf Cauchyfolgen in Kreisscheiben beschränken, denn andere gibt es in diesem Fall (fast) nicht.

[56] das naive „Weglassen“ von Punkten einer vollständigen Fläche führt zu Unvollständigkeit.

[57] auf keiner Fläche nullhomotop, in welcher genau ein Loch gestopft ist.

[58] d.h. daß Endpunkte beweglich sind.

Satz 1.44. *Zwei einfache*[59] *transversale Wege* α, β *auf einer hyperbolischen Fläche* S *sind genau dann in* minimaler Position[60]*, wenn* $\alpha \cup \beta$ *kein* Zweieck[61] *enthählt.*

Beweis. „$\Leftarrow$": o.E. $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Wähle Lifts $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ mit nichttrivialem Schnitt.
Behauptung: $|\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}| = 1$.

Für zwei beliebige Lifts gilt dann also $|\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}| \leq 1$. Gäbe es ein zu β homotopes β' mit $|\alpha \cap \beta'| < |\alpha \cap \beta|$, so gäbe es zu diesem einen zu $\tilde{\beta}$ homotopen Lift $\tilde{\beta}'$, welcher weniger Schnittpunkte mit $\tilde{\alpha}$ hat als $\tilde{\beta}$, d.h. gar keinen mehr.
Beweis der Behauptung:
Annahme: $\{v, w\} \subseteq \tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}$ mit einem Zweieck D mit den Enden v, w. Bezeichne die Ränder des Zweiecks auf den Wegen jeweils als $\tilde{\alpha}_1$ und $\tilde{\beta}_1$.
1. Schritt: o.E. $D^\circ \cap (p^{-1}(\alpha) \cup p^{-1}(\beta)) = \emptyset$, denn $\tilde{\alpha}_1 \cap p^{-1}(\beta)$ ist endlich, genauso wie $\tilde{\beta}_1 \cap p^{-1}(\alpha)$. Da α und β einfach sind, sind für jede Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(\beta) \cap D^\circ$ die Endpunkte auf $\tilde{\beta}_1$. Finde also „innerste" Zweiecke.
2. Schritt: $p|_{\partial D}$ ist injektiv, denn

(i) $p(v) \neq p(w)$ weil $i_v(\alpha, \beta) = i_v(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = -i_w(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = -i_w(\alpha, \beta)$.

(ii) gibt es $x \in \tilde{\alpha}_1$, $y \in \tilde{\beta}_1$ mit $p(x) = p(y)$, so sind $x, y \in p^{-1}(\alpha \cap \beta)$, würden also ein Zweieck $D' \subsetneq D$ begrenzt.

(iii) Ist $p(x) \neq p(x')$ für $x \neq x' \in \tilde{\alpha}_1$, so ist $p([x, x_1]) = \alpha$, da α einfach. Also gibt es $v' \in [x, x']$ mit $p(v') = p(v)$. Dann liegt aber ein Stück von $p^{-1}(\beta)$ in D, Widerspruch.

3. Schritt: $p|_{D^\circ}$ ist injektiv.
Seien $x, y \in D^\circ$ mit $p(x) = p(y)$. Dann existiert ein $\gamma \in \mathrm{Deck}(p)$ mit $\gamma(x) = y$. Da $p|_{\partial D}$ injektiv ist, ist $\gamma(\partial D) \cap \partial D = \emptyset$. Dann ist entweder $\gamma(D) \subseteq D$ oder $D \subseteq \gamma(D)$ und damit $\gamma^{-1}(D) \subseteq D$. Also hat γ einen Fixpunkt in D (Brouwerscher Fixpunktsatz). Es folgt $\gamma = 1$, da $\mathrm{Deck}(p)$ *frei* operiert. Es ergibt sich $x \neq y = \gamma(x) = x$, ein Widerspruch. □

Folgerung: Geodätische sind stets in minimaler Position.

[59] schneiden sich nicht selbst.
[60] d.h. die geometrische Schnittzahl ist gleich der Anzahl der Schnittpunkte.
[61] d.h. zwei Schnittpunkte, welche eine Kreisscheibe umschließen. Zweiecke lassen sich offensichtlich auflösen.

Kapitel 2

Definition der Abbildungsklassengruppe

2.1 Abbildungsklassengruppen und Dehn-Twists

Dehn-Twists sind die einfachsten Abbildungsklassen von unendlicher Ordnung.

Definition 2.1. Sei S eine kompakte orientierbare Fläche (mit oder ohne Rand), so nennt man die Gruppe[1] $\mathrm{Mod}(S)$ der Isotopieklassen von (orientierungserhaltenden?) Homöomorphismen auf S die Abbildungsklassengruppe von S.

Definition 2.2.

a) Mit $\mathrm{Hom\ddot{o}o}^+(S)$ wird die Gruppe der orientierungserhaltenden Homöomorphismen der Fläche S bezeichnet.

b) Mit $\mathrm{Hom\ddot{o}o}_0(S)$ wird die Zusammenhangskomponente der Identität in $\mathrm{Hom\ddot{o}o}^+(S)$ bezeichnet (bzgl. der Kompaktoffentopologie).

Lemma 2.3. *In der Kompaktoffentopologie auf* $\mathrm{Hom\ddot{o}o}^+(S)$ *besteht die Untergruppe* $\mathrm{Hom\ddot{o}o}_0(S)$ *aus den Homöomorphismen von S, welche zur Identität* id_S *isotop sind.*

Beweis. Proposition 1.11. □

Bemerkung. Also gilt $\mathrm{Mod}(S) = \mathrm{Hom\ddot{o}o}^+(S)/\mathrm{Hom\ddot{o}o}_0(S)$, da $\mathrm{Hom\ddot{o}o}_0(S)$ normal in $\mathrm{Hom\ddot{o}o}^+(S)$ sein muß[2].

Definition 2.4. Ein *Differomorphismus* ist eine Abbildung $f : M \to N$ zwischen zwei *differenzierbaren Mannigfaltigkeiten*[3] M, N, mit den Eigenschaften:

1. f ist bijektiv,

[1] daß es sich hierbei tatsächlich um eine Gruppe handelt, sehen wir wie folgt: seien $f, f', g, g' \in \mathrm{Hom\ddot{o}o}^+(S)$ und f zu f' und g zu g' homotop. Die entsprechenden Isotopien bezeichnen wir mit F und G. Dann ist $f \circ g$ zu $f' \circ g$ isotop, via der Isotopie $g_*(F) : S \times [0;1] \to S, (s,t) \mapsto F(g(s),t)$. Desweiteren sind $f' \circ g$ und $f' \circ g'$ isotop via $f' \circ G$. Also sind $f \circ g$ und $f' \circ g'$ isotop.

[2] Wir haben bereits eingesehen, daß die Äquivalenzrelation „isotop zur Identität“ eine *Kongruenzrelation* ist. Daher folgt aus Lemma 2.3 direkt, daß $\mathrm{Hom\ddot{o}o}_0(S)$ ein Normalteiler ist.

[3] mit beliebig oft differenzierbaren Kartenwechseln.

2. f und f^{-1} sind in jedem Punkt beliebig oft stetig differenzierbar.

Satz 2.5. *Jeder Homöomorphismus einer differenzierbaren Fläche S ist isotop zu einem Diffeomorphismus.*

Beweis. ...SCHWER[4]... □

Satz 2.6. *Sei S eine (kompakte) hyperbolische Fläche, α, β einfach geschlossene Wege auf S. Dann ist α* homotop *zu β genau dann, wenn α* isotop *zu β ist.*

Beweis. Seien α, β homotop.
1. Schritt: o.E. $\alpha \cap \beta = \emptyset$, denn $i_g(\alpha, \beta) = 0$, da $i_g(\alpha, \beta) = i_g(\alpha, \alpha) = 0$, denn α ist einfach[5]. Gilt $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, so gibt es ein Zweieck (Satz 1.44) und ein Zweieck eine Isotopie.
2. Schritt: Wähle Lifts $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ auf der Universellen Überlagerung mit gemeinsamen Endpunkten (im Unendlichen). Sei A eine zugehörige hyperbolische Transformation. Dann sind $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ disjunkt. Die Fläche $\tilde{F}$ zwischen $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ projizieren wir auf $F := p(\tilde{F})$. Es gilt $F = \langle A \rangle \backslash \tilde{F}$. Also hat F zwei Randkomponenten, nämlich α und β. Desweiteren gilt $\pi_1(F) = \mathbb{Z}$. Also ist F ein Kreisring. Daher sind α und β *isotop.* □

Satz 2.7. *Zwei Homöomorphismen auf einer kompakten hyperbolischen Fläche S sind genau dann* isotop*, wenn sie* homotop *sind.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß ein Homöomorphismus ϕ, welcher homotop zur Identität ist, zur Identität auch isotop ist.

Sei $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ eine maximale (günstige!?) Kette[6] von einfachen geschlossenen Wegen in S mit $|\gamma_i \cap \gamma_{i+1}| = 1$ und $|\gamma_i \cap \gamma_j| = 0$ für $j \neq i, i+1$.

Schneide entlang der Wege auf. Wir erhalten disjunkte Kreisscheiben.

Dann ist α isotop zu β genau dann, wenn α homotop zu β ist (Satz 2.6). Daher existiert eine Isotopie[7] H, welche γ_1 auf $\phi_* \circ \gamma_1$ abbildet. Diese setzen wir Schritt für Schritt auf die disjunkten Kreisscheiben fort, welche wir entsprechend zusammenkleben. □

Definition 2.8. Sei S eine orientierbare Fläche mit Rand. Die *relative Abbildungsklassengruppe* $\mathrm{Mod}(S, \partial S) := \pi_0(\mathrm{Homöo}^+(S, \partial S))$ besteht aus den Isotopieklassen von auf ∂S trivialen Homöomorphismen.

Lemma 2.9 (Alexandertrick)**.** *Für die Einheitskreisscheibe $\mathfrak{B}$ gilt* $\mathrm{Mod}(\overline{\mathfrak{B}}, \partial\overline{\mathfrak{B}}) = 1$.

Beweis. 1. Schritt: Jeder Homöomorphismus von $S^1 \to S^1$ kann zu einem Homöomorphismus der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe B fortgesetzt werden (Aufgabe 7).
2. Schritt: Jeder Homöomorphismus $\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{B}}$ ist homotop zur Identität (Aufgabe 8a).
Jeder orientierungserhaltende Homöomorphismus $\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{B}}$ ist isotop zur Identität (Aufgabe 8b). □

Satz 2.10. *Sei A ein Kreisring. Dann gilt* $\mathrm{Mod}(A, \partial A) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Man stelle sich einen Kreisring als Zylinder vor, betrachte einen Weg δ vom einen Rand zum anderen und lifte diesen in die universelle Überlagerung. Diese ist ein Band und der Weg markiert „Rechtecke". Daher[8] ist die Gruppe der Decktransformationen isomorph zu $\mathbb{Z}$. □

[4] gilt nicht in allen Dimensionen und gilt bspw. auch nicht für holomorphe Funktionen.
[5] und S ist orientierbar.
[6] $S \cong \Sigma_g$
[7] $\phi_* \circ \gamma_1$ und γ_1 sind homotop.
[8] das geht bestimmt viel genauer...

Definition 2.11. Ein Kreisring $A = [1; 2] \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ und $T : A \to A, (r, \theta) \mapsto (r, \theta + 2\pi r)$. Sei nun S eine orientierbare Fläche und α ein einfach geschlossener Weg auf S. Wir wählen eine Umgebung N von α und eine orientierungserhaltende Einbettung $\phi : A \to S$ mit Bild N. Der entsprechende *Dehn-Twist* T_α ist der Homöomorphismus $T_\alpha : S \to S$ mit

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in S - N, \\ \phi \circ T \circ \phi^{-1}(x), & \text{falls } x \in N. \end{cases}$$

<u>Was passiert auf Wegen?</u>

Sei b eine Isotopieklasse von einfach geschlossenen Wegen auf S.
Falls $i_g([\alpha], b) = 0$, so folgt $T_\alpha(b) = b$.
Falls $i_g([\alpha], b) \neq 0$, dann wird anschaulich zu $\beta \in b$ der Weg α genau $i_g([\alpha], b)$ mal hinzugefügt (Achtung Orientierung...).

Proposition 2.12 (Koordinatenwechsel)**.** *Seien α, β zwei einfach geschlossene, nicht-trennende*[9] *Wege auf einer Fläche S. Dann existiert ein Homöomorphismus ϕ mit $\phi_*(\alpha) = \beta$.*

Beweis. Schneide S einmal entlang α auf und einmal entlang β und vergleiche die beiden Euler-charakteristiken:

$$\chi(S_\alpha) = \chi(S_\beta).$$

Also ist S_α homöomorph zu S_β. Zusammenkleben: erhalten Homöomorphismus $S \to S$, welcher α auf β abbildet. □

Proposition 2.13 (Nichttrivialität von T_α)**.** *Sei S eine hyperbolischen Fläche und α einfach geschlossene Wege auf S. Dann ist T_α nicht zur Identität homotop.*

Beweis. <u>1. Fall:</u> α ist nicht-trennend. Dann existiert ein einfach geschlossener Weg β mit $|\alpha \cap \beta| = 1$. Dann gilt $|T_\alpha(\beta) \cap \beta| = 1$. Mit dem Zweieck-Kriterium (Satz 1.44) folgt, daß $i_g(T_\alpha([\beta]), [\beta]) = 1$. Deshalb ist T_α nicht zur Identität homotop.
<u>2. Fall:</u> α ist trennend. Dann existiert kein β wie im ersten Fall. Andererseits finden wir einen einfach geschlossenen Weg β mit $|\alpha \cap \beta| = 2$ und $i_g([\alpha], [\beta])$. Dann gilt $|T_\alpha(\beta) \cap \beta| = 4$. Mit dem Zweieck-Kriterium (Satz 1.44) folgt, daß $i_g(T_\alpha([\beta]), [\beta]) = 4$, da es kein Zweieck gibt. Deshalb ist T_α nicht zur Identität homotop. □

2.2 Eigenschaften von Dehn-Twists

2.2.1 Schnittpunktformel für Dehn-Twists

Proposition 2.14. *Seien a, b beliebige Isotopieklassen von einfach geschlossenen Wegen auf einer kompakten orientierbaren zusammenhängenden hyperbolischen Fläche S, $k \in \mathbb{Z}$ beliebig, dann gilt*

$$i(T_a^k(b), b) = |k| i(a, b)^2.$$

Beweis. Wähle Repräsentanten α und β von a und b in minimaler Position. Überprüfe, daß $T_a(\beta)$ und β kein Zweieck bilden. Satz vom Zweieck... □

[9] d.h. wir erhalten bei Aufschneiden nur eine Zusammenhangskomponente.

Fakt 1: $T_a(b) = b \Leftrightarrow i(a,b) = 0$.

Fakt 2: $T_a = T_b \geq a = b$.

Fakt 3: $f \in \mathrm{Mod}(S) \Rightarrow T_{f(a)} = fT_af^{-1}$.

Fakt 4: $f \in \mathrm{Mod}(S) \Rightarrow [f, T_a] = 1 \Leftrightarrow f(a) = a$.

Fakt 5: a, b nichttrennend $\Rightarrow T_a, T_b$ sind in $\mathrm{Mod}(S)$ konjugiert.

Fakt 6: $[T_a, T_b] = 1 \Leftrightarrow i(a,b) = 0$.

Beweis. Ad 1: Aus $i(a,b) \neq 0$ folgt dank Proposition 2.14 $i(T_a(b), b) \neq 0$, also $T_a(b) \neq b$. Die andere Implikation folgt aus dem vorigen Abschnitt (1. Vortra).
Ad 2: Mit Fakt 1 genügt es eine Isotopieklasse c bon Wegen zu finden, für welche $i(a,c) = 0$ und $i(b,c) \neq 0$, denn dann impliziert $a \neq b$, daß $T_a(c) = c$ dank Fakt 1 und ausserdem $F_b(c) \neq c$, also $T_a \neq T_b$.
Falls $i(a,b) \neq 0$, wähle $a = c$. Mit Koordinatenwechsel (Vortrag 1) findet man ein solches c.
Ad 3: Folgt aus der Definition der Dehn-Twists.
Ad 4: $\Rightarrow$: Aus $1 = [f, T_a] = fT_af^{-1}T_a^{-1}$ ergibt sich mit Fakt 3 $T_{f(a)}T_a^{-1} = 1$, also $f(a) = a$ dank Fakt 2.
$\Leftarrow$: $[f, T_a] = T_{f(a)}T_a^{-1} = 1$ im Fall $f(a) = a$.
Ad 5: a, b nichttrennend, dann existiert ein $h \in \mathrm{Mod}(S)$ mit $h(a) = b$. Hieraus folgt $T_{h(b)} = T_b$.
Ad 6: $\Rightarrow$: $1 = [T_a, T_b] = T_aT_bT_a{-}1T_b^{-1}$ impliziert dank Fakt 4 $T_a(b) = b$, also $i(a,b) = 0$ dank Fakt 1.
$\Leftarrow$: $i(a,b) = 0$ impliziert $T_a(b) = b$ dank Fakt 1, also $[T_a, T_b] = 1$. □

Satz 2.15 (ZUSATZ). *Seien a, b disjunkte nichthomotope Wege auf einer kompakten zusammenhängenden hyperbolischen Fläche S, so ist die von T_a und T_b erzeugte Untergruppe $\Gamma \leq \mathrm{Mod}(S)$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang 2.*

Beweis. Γ ist abelsch dank Fakt 6. Es bleibt zu zeigen, daß $T_a^n \circ T_b^m$ für kein $(m,n) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ homotop[10] zur Identität ist. Wähle einen Weg c, der a und b schneidet. Aus Proposition 2.14 besagz, daß $T_a^n \circ T_b^m(c)$ den Weg c in *mehreren*[11] *Punkten* schneidet. Daher sind diese beiden Wege nicht identisch. □

2.2.2 Zopf-Relation

Proposition 2.16. *Seien a, b Wege auf einer kompakten zusammenhängenden hyperbolischen Fläche S. Aus $i(a,b) = 1$ folgt dann $T_a \circ T_b(a) = b$.*

Beweis. Bild. □

Proposition 2.17 (Zopf-Relation). *Seien a, b nichthomotope Wege auf einer kompakten zusammenhängenden hyperbolischen Fläche S. Dann ist $i(a,b) = 1$ äquivalent zu $T_a \circ T_b \circ T_a = T_b \circ T_a \circ T_b$.*

[10] Frank: „mit der Schlamperei müssen wir leben!“
[11] da a und b nicht homotop sind.

Beweis. $\Rightarrow$: Aus $i(a,b) = 1$ ergibt sich dank Proposition 2.16, daß $T_aT_b(a) = b$, mit Fakt 2 also $T_{T_aT_b(a)} = T_b$. Fakt 3 beschert uns

$$(T_aT_b)T_a(T_aT_b)^{-1} = T_aT_bT_aT_b^{-1}T_a^{-1} = T_b \Leftrightarrow T_aT_bT_a = T_bT_aT_b.$$

$\Leftarrow$: $T_aT_bT_a = T_bT_aT_b \Rightarrow T_aT_b(a) = b \Rightarrow i(a, T_aT_b(a)) = i(a,b)$. Wenden wir T_a^{-1} auf beide Wege links an, so ergibt sich $i(a, T_b(a)) = i(a,b)$. Proposition 2.14 beschert uns $i(a,b)^2 = i(a,b)$, also $i(a,b) = 1$ oder $i(a,b) = 0$. Wir erhalten $a = b$ oder im Fall $a \neq b$ gilt $i(a,b) = 1$ laut Satz 2.15. □

2.2.3 Laternen-Relation (Dehn 1930)

Proposition 2.18 (Laternen-Relation)**.** *In* $\mathrm{Mod}(\Sigma_{0,4}, \partial\Sigma_{0,4})$ *gilt*

$$T_xT_yT_z = T_{b_1}T_{b_2}T_{b_3}T_{b_4}.$$

Beweis. Dank Bild gilt die Relation auf drei Wegen ... + Alexandertrick. □

2.3 Die Abbildungsklassengruppe des Torus

Jeder Homöomorphismus f des Torus $\mathbb{T}$ induziert einen Automorphismus f_* von $\pi_1(\mathbb{T})$, welcher nur von der Isotopieklasse von f abhängt. Wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus $\sigma : \mathrm{Mod}(\mathbb{T}) \to \mathrm{Aut}(\pi_1(\mathbb{T})) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Da Elemente aus $\mathrm{Mod}(\mathbb{T})$ orientierungserhaltend sind, gilt $\det(\sigma(f) > 0$. Also $\sigma : \mathrm{Mod}(\mathbb{T}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Satz 2.19. *σ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Sind Bilder von $(1,0)$ und $(0,1)$ unter f_* die Elemente (p,q) und (r,s), dann

$$\sigma(f) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}.$$

$\sigma(f)$ ist wohldefiniert, da die Elemente aus $\pi_1(\mathbb{T})$ invariant unter Isotopie sind. Sei $\tilde{\sigma} : \mathrm{Homöo}^+(\mathbb{T}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durch die Aktion von $\pi_1(\mathbb{T})$ ... definiert. Sei nun $f \in \mathrm{Homöo}^+(\mathbb{T})$ isotop zu $\mathrm{id}_{\mathbb{T}}$. Dann gilt $f((1,0)) = (1,0)$ und $f((0,1)) = (0,1)$.

Wir haben eine Isotopie $H : \mathbb{T} \times [0;1] \to \mathbb{T}$ mit $H(x,0) = f(x)$ und $H(x,1) = x$. Wir erhalten für einen Weg α auf $\mathbb{T}$ eine Istopie[12], welche zeigt, daß $f(\alpha)$ isomotop zu α ist, indem wir $h : [0;1] \times [0;1] \to \mathbb{T}, (t,s) \mapsto H(\alpha(t), s)$ definieren.

Also gilt $\mathrm{Homöo}_0 \subseteq \mathrm{Kern}(\tilde{\sigma})$.

Für die obige Matrix gilt

$$\deg(\sigma(f)) = i((p,q),(r,s)).$$

Um die *Surjektivität* zu zeigen, sehen wir zunächst ein, daß alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit ϕ auf $\mathbb{R}^2$ realisiert werden kann[13]. ϕ gehört zu einem Homöomorphismus auf $\mathbb{T}$. Es folt, daß mit einem f aus der Klasse von ϕ sogar $\sigma(f) = M$ gilt.

[12] *freie* Isotopie, was nicht stört, da die Fundamentalgruppe abelsch ist. In höherem Geschlecht müssen erhalten wir also lediglich einen Homomorphismus die Abelisierung der Fundamentalgruppe.

[13] via des kanonischen Isomorphismus $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Zum Nachweis der *Injektivität* sei $\tilde{\sigma}(f) = \mathrm{id} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Sind α und β zu $(1,0)$ bzw. $(0,1)$ homotope Wege, so sind $f(\alpha)$ und α bzw. $f(\beta)$ und β jeweils homotop. Nach Satz 2.6 sind $f(\alpha)$ und α isotop. Nach Erweiterung dieser Isotopie auf ganz $\mathbb{T}$ gilt dann bis auf Isotopie $f(\alpha) = \alpha$.

f halte also o.E. α punktweise fest. Nach Aufschneiden an α erhalten wir eine Fläche A und f als Repräsentant eines Elementes $g \in \mathrm{Mod}(A, \partial A)$. β und $f(\beta)$ sind Wege in A. $\rho : \mathrm{Mod}(A, \partial A) \to \mathbb{Z}$ (universelle Überlagerung) mit $\rho(g) = 0$. Daher entspricht g der Identität in $\mathrm{Mod}(A, \partial A)$. Insbesondere ist f nicht anderes als die Identität in $\mathrm{Mod}(\mathbb{T})$. $\square$

Kapitel 3

Kurvenkomplexe

3.1 Kurvenkomplexe

Definition 3.1. Ein *einfach geschlossener Weg* auf einer orientierbaren kompakten zusammenhängenden Fläche S (mit Rand) ist eine stetige injektive[1] Abbildung $\gamma : S^2 \to S$, welche folgende Bedingungen erfüllt:

i) γ ist nicht *nullhomotop*,

ii) γ ist nicht *peripher*[2].

Definition 3.2. Die *Mindestschnittzahl* nicht homotoper einfach geschlossener Wege auf S ist

$$m(S) := \min\{|\alpha \cap \beta| \mid \alpha \neq \beta, \alpha, \beta \text{ einfach geschlossene Wege auf } S\}.$$

Bemerkung. $m(\Sigma_{0,4}) = 2, m(\Sigma_{1,0}) = m(\Sigma_{1,1}) = 1$ und $m(\Sigma_{g,b}) = 0$ sonst.

Definition 3.3. Ein *simplizialer Komplex* ist eine Menge Δ mit

i) $\emptyset \in \Delta$,

ii) jedes $\sigma \in \Delta$ ist eine endliche Menge,

iii) $\forall \sigma \in \Delta : \tau \subseteq \sigma \Longrightarrow \tau \in \Delta$.

Bemerkung. Eine $k+1$-elementige Menge $\sigma \in \Delta$ nennt man einen *k-Simplex*. Die *Dimension* von Δ ist definiert als

$$\dim(\Delta) := \sup\{\#\sigma - 1 \mid \sigma \in \Delta\}.$$

Ein *Unterkomplex* ist eine Teilmenge $\Theta \subseteq \Delta$ so daß Θ selbst ein Komplex ist. Beispielsweise ist

$$\Delta^{(k)} := \{\sigma \in \Delta \mid \#\sigma \leq k+1\}$$

der größte k-dimensionale Unterkomplex von Δ. Dieser wird *k-Skelett* von Δ genannt.

[1] also schneidet sich γ *nicht* selbst.

[2] d.h. nicht homotop zu einem einfach geschlossenen Weg auf ∂S.

$V(\Delta) := \{v \mid \{v\} \in \Delta\}$, $K(\Delta) := \{(v,w) \mid \{v,w\} \in \Delta, \#\{v,w\} = 2\}$ definiert einen ungerichteten Graphen. Die Begriffe zusammenhanghängend, Durchmesser etc. übertragen sich direkt von diesem Graphen auf den Komplex. Insbesondere haben wir zu $v, w \in V(\Delta)$ den *Abstand* als die Länge $d(v,w)$ des kürzesten Weges von v zu w in diesem Graphen. Der *Durchmesser* von Δ ist dann durch $\sup\{d(v,w) \mid v,w \in V(\Delta)\}$ gegeben.

Definition 3.4. Sei S eine orientierbare kompakte zusammenhängende Fläche (mit Rand) und es bezeichne V die Menge der Homotopieklassen einfach geschlossener Wege auf S. Dann ist

$$C(S) := \{\sigma \subseteq V \mid \forall\{v,w\} \subseteq \sigma : \#\{v,w\} = 2 \Longrightarrow i(v,w) = m(S)\}$$

ein Komplex. Dieser wird *Kurvenkomplex* von S genannt.

Bemerkung. Sei $S \cong \Sigma_{g,b}$, γ ein einfach geschlossener Weg auf S, $N \subseteq S$ eine Schlauchumgebung[3] von γ mit $N \cong \Sigma_{0,2}$. $N^\circ = N - \partial N$ und es gibt zwei Fälle:

a) $S_\gamma := S - N^\circ$ ist zusammenhängend, also ist γ *nicht trennend* und $S - N^\circ \cong \Sigma_{g-1,b+2}$,

b) $S_\gamma = S - N^\circ$ hat *zwei* verschiedene Zusammenhangskomponenten C_1 und C_2, also ist γ *trennend* und es gilt $C_1 \cong \Sigma_{g_1,b_1+1}$ und $C_2 \cong \Sigma_{g_2,b_2+1}$, wobei $g = g_1 + g_2$ und $b = b_1 + b_2$.

Stichtwort: Koordinatenwechsel.

Bemerkung. Als Komponenten von S_γ kommen $\Sigma_{0,0}$ und $\Sigma_{0,1}$ nicht in Frage, da γ nicht nullhomotop ist. Falls $\Sigma_{0,2}$ eintritt, so ist γ entweder peripher[4], im Widerspruch zur Annahme, also ist $S \cong \Sigma_{1,0}$ ein Torus.

Satz 3.5. *Sei $S \cong \Sigma_{g,b}$ hyperbolisch, also $n := 3g + b - 3 \geq 0$ und sei $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\} \subseteq C(S)$ eine k-Elementige Menge* disjunkter *Wege. Dann gibt es zu allen γ_i paarweise disjunkte Wege $\gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n \in C(S)$ mit*

$$\#\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} = n = 3g + b - 3.$$

Im Fall $g = 0, b = 4$ gilt $n = 1$.

Beweis. Die *Hose* $\Sigma_{0,3}$ ist die einzige hyperbolische Fläche ohne einfach geschlossene Wege[5].

Es gilt $3g' + b' < 3g + b$ falls $\sigma_{g',b'}$ eine Komponente der Zerlegung von $\Sigma_{g,b}$ an γ mit beliebigem γ ist (siehe Teil b) obiger Bemerkung, $g_1 + g_2$ und $b_1 + b_2 = b$ etc.). Iterativ erhalten wir daher eine *Hosenzerlegung*, durch sukzessives aufschneiden an γ_i's.

Induktion über $3g + b$, um $n = 3g + b - 3$ zu zeigen. Falls $3g + b = 3$, so liegt eine Hose vor und es gilt offensichtlich $n = 0$. Sei $3g + b > 3$. Falls γ_n nicht trennend ist, so sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ disjunkte einfach geschlossene Wege auf S_{γ_n}. Die Induktionsvoraussetzung beschert uns $n - 1 = 3(g-1) + (b+2) - 3$. Falls γ_n trennend ist, so verteilen sich die Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ auf die beiden Zusammenhangskomponenten und wir erhalten $n - 1 = (3g_1 + (g_1 + 1) - 3) + (3g_2 + (b_2 + 1) - 3)$. □

Konsequenz: Es gilt für unseren Komplex $\dim C(S) = 3g + b - 4$ falls $m(S) = 0$ (insbesondere liegt wirklich ein Komplex vor!).

[3](relativ kompakt und) einfach zusammenhängend

[4](bspw.) in $\Sigma_{0,2}$.

[5]siehe Bemerkung oben; alternativ: jeder Weg auf $\Sigma_{0,3}$ ist peripher.

Behauptung: Sei $\{\gamma_0, \dots, \gamma_k\} \in C(S)$ ein k-Simplex mit $m(S) = 0$. Dann erzeugen $\gamma_0, \dots, \gamma_k$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang $k+1$ in $\mathrm{Mod}(S)$. Genauer ist

$$\varphi : \mathbb{Z}^{k+1} \to \mathrm{Mod}(S), (z_0, \dots, z_k) \mapsto \prod_{i=0}^{k} T_{\gamma_i}^{z_i}.$$

Da disjunkte Dehntwists miteinander kommutieren[6], ist φ durch die UAE von $\mathbb{Z}^{k+1}$ eindeutig bestimmt und insbesondere wohldefiniert. Es bleibt also die *Injektivität* zu beweisen. Seien nun $(z_0, \dots, z_k) \in \mathrm{Kern}\,\varphi$, wobei wir $z_k > 1$ annehmen dürfen. Dann gibt es einen einfach geschlossenen Weg α auf S mit $i(\alpha, \gamma_k) \neq 0$ und $i(\alpha, \gamma_i) = 0$ für alle $i \neq k$. Schneiden wir nun an $\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}$ auf, so ist γ_k ein Weg auf der übrigen Komponente. Daher gilt

$$\alpha = \prod_{i=0}^{k} T_{\gamma_i}(\alpha)^{z_i} = T_{\gamma_k}^{z_k}(\alpha) \neq \alpha,$$

ein Widerspruch (da $i(\gamma_k, T_{\gamma_k}^{z_k}(\alpha)) = |z_i| i(\alpha, \gamma_k)^2 > i(\alpha, \gamma_k)$ wegen $z_k > 1$).

Bemerkung. Es gibt also freie abelsche Untergrupppen von $\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,b})$ vom Rang $3g + b - 3$ falls $3g + b - 3 \geq 1$.

Proposition 3.6. *$S \cong \Sigma_{g,b}$, $(g, b) \neq (0, 4)$, so ist $C(S)$ zusammenhängend.*

Beweis. Seien $\alpha, \beta \in V(C(S))$.

Fall 1: $i(\alpha, \beta) = 0 \Longrightarrow (\alpha, \beta \in K(C(S))$,

Fall 2: $i(\alpha, \beta) = 1$ ist für $S \cong \Sigma_{1,0}$ und $S \cong \Sigma_{1,1}$ klar. Sei also $g \geq 1$. Hier beweist man wie üblich mit einem Bild. Man erhält einen Weg γ, welcher Anlaß zu dem gesuchten Weg gibt.

Fall 3: $i(\alpha, \beta) \geq 2$. Wieder Bild (Fallunterscheidung, ob die Schnitte von α auf β gleich orientiert sind oder ob nicht).

□

Wir haben den *Unterkomplex* $N(S)$ der *nichttrennenden* Wegen[7]. Dieser hat Dimension $N(S) = g - 1$. Für $g \geq 2$ ist dieser wieder zusammenhängend.

[6] alter Vortrag.
[7] Anschaulich: Wege an den Henkeln...

Literaturverzeichnis

[Bou71] BOURBAKI, N., *Topologie générale*. Hermann, Paris, 1971.