FREITAG ABEND

Definition (Homotopie und Isotopie):
Seien X, Y topologische Räume.

a) Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen *homotop* ($f \simeq g$), wenn es eine stetige Abbildung $A : X \times [0,1] \to Y$ gibt mit $A(x,0) = f(x)$ und $A(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$. A heißt *Homotopie* von f nach g.

   Schreibe $A(x,s) =: a_s(x)$, also $a_s : X \to Y$. Es ist dann $a_0 = f$ und $a_1 = g$. $(a_s)_{s\in[0,1]}$ ist eine stetige Deformation von f in g.

b) Zwei Homöomorphismen $f, g : X \to Y$ heißen *isotop*, wenn es eine Homotopie $A = (a_s)_{s\in[0,1]}$ von f nach g gibt, so daß jedes a_s, $s \in [0,1]$, ein Homöomorphismus ist. A heißt dann *Isotopie* von f nach g.

Bemerkung:
Für die meisten kompakten, orientierbaren Flächen S gilt: Zwei Homöomorphismen $f, g : S \to S$ sind genau dann homotop, wenn sie isotop sind. Das werden wir am Sonntag sehen.

Definition:
Seien X, Y topologische Räume.

a) Für $y_0 \in Y$ ist die konstante Abbildung gegeben durch $c_{y_0} : X \to Y$, $x \mapsto y_0$.

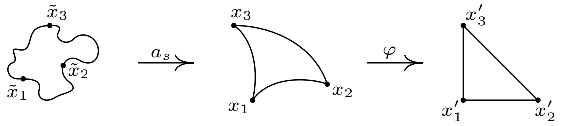
b) Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt *nullhomotop*, wenn sie zu einer konstanten Abbildung homotop ist.

c) Ein Homöomorphismus $f : X \to Y$ heißt *nullisotop*, wenn es ein $y_0 \in Y$ und eine Homotopie $A = (a_s)_{s\in[0,1]}$ von f nach c_{y_0} gibt, so daß jedes a_s, $s \in [0,1)$, ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe:
Seien S eine orientierbare Fläche und $f, g : S \to S$ isotope Homöomorphismen. Zeige: f ist genau dann orientierungserhaltend, wenn g orientierungserhaltend ist.

Lösung:
Sei f orientierungserhaltend. Sei $A = (a_s)_{s\in[0,1]}$ eine Isotopie von f nach g. Setze $U_+ := \{s \in [0,1] : a_s$ ist orientierungserhaltend$\}$ und $U_- := \{s \in [0,1] : a_s$ ist orientierungsumkehrend$\}$. Klar: $0 \in U_+$ und $U_+ \cup U_- = [0,1]$ und $U_+ \cap U_- = \emptyset$. Zeige: U_+ und U_- sind offen in $[0,1]$.

- Sei $s \in U_+$, also a_s orientierungserhaltend. Seien $U \subseteq S$ offen und $\varphi : U \to K(0,2) \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Karte von S. Seien $x_1' := (0,0)$, $x_2' := (1,0)$, $x_3' := (0,1)$, $\Delta' := \Delta(x_1', x_2', x_3')$ sowie $x_i := \varphi^{-1}(x_i')$, $\tilde{x}_i := a_s^{-1}(x_i)$, $\Delta := \varphi^{-1}(\Delta')$ und $\tilde{\Delta} := a_s^{-1}(\Delta)$. Δ und $\tilde{\Delta}$ sind also Dreiecke in S.

  Setze $V_{ij}' := \{x \in K(0,2) : d(x, [x_i', x_j']) < \frac{1}{17}\}$ und $V_{ij} := \varphi^{-1}(V_{ij}')$ $(i < j)$. Da A stetig ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $A([\tilde{x}_i, \tilde{x}_j] \times (s-\varepsilon, s+\varepsilon)) \subseteq V_{ij}$ für alle $i < j$.
  $\Rightarrow$ Alle $a_{s'}(\tilde{x}_i)$ sind nahe bei x_i und alle $a_{s'}([\tilde{x}_i, \tilde{x}_j])$ sind nahe bei $[x_i, x_j]$ für $s' \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon)$.
  $\Rightarrow$ Jedes $a_{s'}$ ist orientierungserhaltend.

- Für U_- geht's ganz genauso. $\square$

Aufgabe:
Finde Homöomorphismen der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe E auf sich, die auf dem Rand S^1 die Identität sind.

Lösung:
Für $\varphi \in \mathbb{R}$ setze $h : E \to E$, $z \mapsto e^{i\varphi(1-|z|)} \cdot z$. $\square$

Aufgabe:
Zeige[1]: Jeder Homöomorphismus von S^1 auf sich kann fortgesetzt werden zu einem Homöomorphismus der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe E auf sich.

Lösung:
Sei $f : S^1 \to S^1$ ein Homöomorphismus. Definiere $F : E \to E$ durch $F(0) := 0$ und $F(z) := |z| \cdot f(\frac{z}{|z|})$ $(z \neq 0)$. F ist ein Homöomorphismus mit Umkehrabbildung $F^{-1} : E \to E$, $0 \mapsto 0$, $z \mapsto |z| \cdot f^{-1}(\frac{z}{|z|})$ $(z \neq 0)$. Es gilt $F|_{S^1} = f$. $\square$

Aufgabe:
Zeige:

a) Jeder Homöomorphismus der (offenen oder abgeschlossenen) Kreisscheibe auf sich ist homotop zur Identität.

b) Jeder orientierungserhaltende Homöomorphismus der abgeschlossenen Kreisscheibe auf sich ist isotop zur Identität.

c) Finde einen Homöomorphismus der (offenen oder abgeschlossenen) Kreisscheibe auf sich, der nicht isotop zur Identität ist. Gib für diesen eine Homotopie zur Identität an.

   (Für die Kreisscheibe stimmen die Begriffe "homotop" und "isotop" also nicht überein.)

Lösung:

a) Sei $f : E \to E$ ein Homöomorphismus. Definiere $A : E \times [0,1] \to E$, $(z,s) \mapsto s \cdot f(z)$. A ist stetig, $A(z,0) = 0$ und $A(z,1) = f(z)$. A ist also eine Homotopie von 0 nach f, d.h. jeder Homöomorphismus ist nullhomotop. Daher sind auch je zwei Homöomorphismen homotop.

   (Der Beweis funktioniert auch für die offene Einheitskreisscheibe.)

b) Sei $f : E \to E$ ein orientierungserhaltender Homöomorphismus. Sei $\psi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$, $x + \mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi i x}$ der kanonische Homöomorphismus von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ nach S^1.

   - Es gibt eine Isotopie von f auf einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus $g : E \to E$ mit $g|_{S^1} = \mathrm{id}$:
     Definiere $A : E \times [0,1] \to E$ durch

$$(z,s) \mapsto \begin{cases} 0 & , z = s = 0 \\ s \cdot f(\frac{z}{s}) & , 0 \leq |z| < s \\ |z| \cdot \psi((|z| - s) \cdot \psi^{-1}(\frac{z}{|z|}) + (1 - |z| + s) \cdot \psi^{-1}(f(\frac{z}{|z|}))) & , |z| \geq s,\ z \neq 0 \end{cases} .$$

     A ist stetig, jedes a_s ist ein Homöomorphismus und $A(z,1) = f(z)$. A ist also eine Isotopie von $a_0 =: g$ nach f. Für $|z| = 1$ gilt $g(z) = A(z,0) = z$.

[1] Das kennt man als Alexander-Trick.

- Es gibt eine Isotopie von g nach id:

  Definiere $A : E \times [0,1] \to E$, $(z,s) \mapsto \begin{cases} z & , s = 0 \\ z & , 0 < s \leq |z| \\ s \cdot g(\frac{z}{s}) & , 0 \leq |z| < s \end{cases}$. A ist stetig, jedes a_s ist ein Homöomorphismus, $A(z,0) = z$ und $A(z,1) = g(z)$. A ist also eine Isotopie von id nach g.

  Beachte außerdem: Die Isotopie A wurde so gewählt, daß jedes $a_s|_{S^1}$ die Identität auf S^1 ist.

c) Der Homöomorphismus $k : E \to E$, $z \mapsto \overline{z}$ ist orientierungsumkehrend, also nicht isotop zur Identität. Definiere $A : E \times [0,1] \to E$, $(z,s) \mapsto s \cdot z + (1-s) \cdot \overline{z}$. A ist stetig, $A(z,0) = \overline{z} = k(z)$ und $A(z,1) = z$. A ist also eine Homotopie von k nach id. $\square$

Aufgabe:
Zeige[2]: Jeder orientierungserhaltende Homöomorphismus von S^2 auf sich ist isotop zur Identität.

Lösung:
???

Definition (Kompakt-Offen-Topologie):
Seien X, Y topologische Räume und $C(X,Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ stetig}\}$. Für $K \subseteq X$ kompakt[3] und $U \subseteq Y$ offen sei $V_{K,U} := \{f \in C(X,Y) : f(K) \subseteq U\}$. Die $V_{K,U}$ bilden die Subbasis einer Topologie auf $C(X,Y)$, der *Kompakt-Offen-Topologie*.

(Erinnerung: Die offenen Mengen in dieser Topologie sind gerade die beliebigen Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen der Form $V_{K,U}$. Das gibt stets eine Topologie.)

Aufgabe:
Seien X, Y Mannigfaltigkeiten. Zeige:

a) Jeder Weg γ in Homöo(X,Y) ist eine Isotopie von $\gamma(0)$ nach $\gamma(1)$.

b) Jede Isotopie in Homöo(X,Y) zwischen zwei Homöomorphismen $f, g : X \to Y$ ist ein Weg von f nach g.

c) Ist $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus, so besteht die Wegzusammenhangskomponente von f in Homöo(X,Y) (bzgl. der Kompakt-Offen-Topologie) gerade aus allen Homöomorphismen, die zu f isotop sind.

Lösung:

a) Seien $\gamma : [0,1] \to$ Homöo(X,Y) ein Weg in Homöo(X,Y) und $f := \gamma(0)$, $g := \gamma(1)$. Setze $A : X \times [0,1] \to Y$, $(x,s) \mapsto \gamma(s)(x)$. Es ist $A(x,0) = f(x)$ und $A(x,1) = g(x)$. Für jedes $s \in [0,1]$ ist $a_s = \gamma(s)$ ein Homöomorphismus.

   Wir zeigen noch, daß A stetig ist. Dazu seien $U \subseteq Y$ offen und $(x,s) \in X \times [0,1]$ mit $A(x,s) = \gamma(s)(x) \in U$. Da X eine Mannigfaltigkeit und $\gamma(s)$ stetig ist, gibt es eine kompakte Umgebung K von x mit $\gamma(s)(K) \subseteq U$, also $\gamma(s) \in V_{K,U}$. Da γ stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\gamma((s-\varepsilon, s+\varepsilon)) \subseteq V_{K,U}$.

   $\Rightarrow \forall (x', s') \in K \times (s-\varepsilon, s+\varepsilon) : \ A(x',s') = \gamma(s')(x') \in \gamma(s')(K) \subseteq U$
   $\Rightarrow A(K \times (s-\varepsilon, s+\varepsilon)) \subseteq U$
   $\Rightarrow A$ ist stetig.

[2] Das ist der Satz von Smale.
[3] Beachte: Die Kompaktheit von K beinhaltet, daß K Hausdorffsch ist.

b) Sei $A : X \times [0,1] \to Y$ eine Isotopie von f nach g. Definiere $\gamma : [0,1] \to \text{Homöo}(X,Y)$ durch $\gamma(s)(x) := A(x,s) = a_s(x)$. Es ist $\gamma(0) = f$ und $\gamma(1) = g$.

Wir zeigen noch, daß γ stetig ist. Dazu seien $V_{K,U} \subseteq \text{Homöo}(X,Y)$ offen und $s \in [0,1]$ mit $\gamma(s) \in V_{K,U}$. Für jedes $k \in K$ ist $A(k,s) = \gamma(s)(k) \in \gamma(s)(K) \subseteq U$. Da A stetig ist, gibt es eine Umgebung W_k von k und ein $\varepsilon_k > 0$ mit $A(W_k \times (s-\varepsilon_k, s+\varepsilon_k)) \subseteq U$. Die $(W_k)_{k\in K}$ bilden eine offene Überdeckung von K, d.h. es reichen endlich viele $W_{k_1}, \ldots, W_{k_m}$. Setze $W := W_{k_1} \cup \ldots \cup W_{k_m}$ und $\varepsilon := \min\{\varepsilon_{k_1}, \ldots, \varepsilon_{k_m}\}$.

Für jedes $k \in K$ gibt es ein k_i mit $k \in W_{k_i}$.
$\Rightarrow \forall\, s' \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon)\ \forall\, k \in K:\ \gamma(s')(k) = A(k,s') \subseteq A(W_{k_i} \times (s-\varepsilon_{k_i}, s+\varepsilon_{k_i})) \subseteq U$
$\Rightarrow \forall\, s' \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon):\ \gamma(s')(K) \subseteq U$, also $\gamma(s') \in V_{K,U}$
$\Rightarrow \gamma((s-\varepsilon, s+\varepsilon)) \subseteq V_{K,U}$
$\Rightarrow \gamma$ ist stetig.

c) Das folgt nun direkt aus a) und b). □

Aufgabe:
Sind X kompakt und Y ein metrischer Raum, so ist die Kompakt-Offen-Topologie auf $C(X,Y)$ gegeben durch die Metrik $d(f,g) := \sup\{d(f(x), g(x)) \,:\, x \in X\}$.

Lösung:

- Seien $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq Y$ offen. Um zu zeigen, daß $V_{K,U}$ offen bzgl. d ist, wählen wir ein $f \in V_{K,U}$ und finden ein $r > 0$ mit $f \in K(f,r) \subseteq V_{K,U}$.

  Es ist $f(K) \subseteq U$ mit $f(K)$ kompakt und U offen. Daher gibt es ein $r > 0$ mit $f(K) \subseteq U' := \{y \in Y \,:\, d(y, f(K)) < r\} \subseteq U$. Für $g \in K(f,r)$ und $k \in K$ gilt $d(g(k), f(K)) \leq d(g(k), f(k)) \leq d(g,f) < r$, also $g(k) \in U' \subseteq U$. Somit gilt $g(K) \subseteq U$ und $g \in V_{K,U}$.

- Seien $f \in C(X,Y)$ und $r > 0$. Um zu zeigen, daß $K(f,r)$ offen bzgl. der Kompakt-Offen-Topologie ist, wählen wir ein $g \in K(f,r)$ und finden eine (bzgl. der Kompakt-Offen-Topologie) offene Menge V mit $g \in V \subseteq K(f,r)$.

  Es ist $d := d(f,g) < r$, setze $\gamma := \frac{r-d}{2}$. Für jedes $x \in X$ ist $K(g(x), \frac{\gamma}{2})$ offen in Y, es gibt also eine offene Umgebung W_x von x mit $g(W_x) \subseteq K(g(x), \frac{\gamma}{2})$ und somit $g(\overline{W}_x) \subseteq K(g(x), \gamma)$. $\overline{W}_x$ ist kompakt.

  $(W_x)_{x\in X}$ ist eine offene Überdeckung von X, d.h. es reichen endlich viele $W_{x_i} =: W_i$, $i = 1, \ldots, m$. Setze $V := V_{\overline{W}_1, K(g(x_1),\gamma)} \cap \ldots \cap V_{\overline{W}_m, K(g(x_m),\gamma)}$. V ist offen bzgl. der Kompakt-Offen-Topologie (sogar ein Basiselement). Wegen $g(\overline{W}_i) \subseteq K(g(x_i), \gamma)$ $(i = 1, \ldots, m)$ ist $g \in V$.

  Wir zeigen nun $V \subseteq K(f,r)$. Dazu seien $h \in V$ und $x' \in X$. Da $(W_i)_{i=1,\ldots,m}$ eine offene Überdeckung von X ist, gilt $x' \in W_i$ für ein i, also $g(x') \in g(W_i) \subseteq K(g(x_i), \frac{\gamma}{2})$ und somit $d(g(x'), g(x_i)) < \frac{\gamma}{2}$. Wegen $h \in V \subseteq V_{\overline{W}_i, K(g(x_i),\gamma)}$ gilt $h(x') \in h(\overline{W}_i) \subseteq K(g(x_i), \gamma)$ und somit $d(h(x'), g(x_i)) < \gamma$. Außerdem gilt $d(f(x'), g(x')) \leq d(f,g) = d$. Insgesamt erhalten wir mit der Dreiecksungleichung $d(h(x'), f(x')) \leq d(h(x'), g(x_i)) + d(g(x_i), g(x')) + d(g(x'), f(x')) < \gamma + \frac{\gamma}{2} + d = \frac{3r+d}{4}$.

  $\Rightarrow d(h,f) \leq \frac{3r+d}{4} < r \Rightarrow h \in K(f,r)$ □

Aufgabe:
Ist Y ein metrischer Raum, so entspricht die Kompakt-Offen-Topologie auf $C(X,Y)$ gerade der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz.

(Insbesondere gilt das also für Mannigfaltigkeiten mit abzählbarer Basis der Topologie.)

Lösung:
Für $K \subseteq X$ kompakt, $f \in C(X,Y)$ und $r > 0$ sei $B_K(f,r) := \{g \in C(X,Y) \mid \sup\limits_{k\in K} d(f(k), g(k)) < r\}$.

Die $B_K(f,r)$ bilden eine Basis der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz. (Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C(X,Y)$ konvergiert in dieser Topologie genau dann gegen ein $f \in C(X,Y)$, wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in jedem Kompaktum $K \subseteq X$ gleichmäßig gegen f konvergiert.)

- Seien $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq Y$ offen. Um zu zeigen, daß $V_{K,U}$ offen bzgl. der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz ist, wählen wir ein $f \in V_{K,U}$ und finden ein $r > 0$ mit $f \in B_K(f,r) \subseteq V_{K,U}$. ($f \in B_K(f,r)$ gilt immer.)

  Es ist $f(K) \subseteq U$ mit $f(K)$ kompakt und U offen. Daher gibt es ein $r > 0$ mit $f(K) \subseteq U' := \{y \in Y : d(y, f(K)) < r\} \subseteq U$. Für $g \in B_K(f,r)$ und $k \in K$ gilt $d(g(k), f(K)) \leq d(g(k), f(k)) < r$, also $g(k) \in U' \subseteq U$. Somit gilt $g(K) \subseteq U$ und $g \in V_{K,U}$.

- Seien nun $K \subseteq X$ kompakt, $f \in C(X,Y)$ und $r > 0$. Um zu zeigen, daß $B_K(f,r)$ offen bzgl. der Kompakt-Offen-Topologie ist, wählen wir ein $g \in B_K(f,r)$ und finden eine (bzgl. der Kompakt-Offen-Topologie) offene Menge V mit $g \in V \subseteq B_K(f,r)$.

  Es ist $d := \sup\limits_{k \in K} d(f(k), g(k)) < r$, setze $\gamma := \frac{r-d}{2}$. Für jedes $k \in K$ ist $K(g(k), \frac{\gamma}{2})$ offen in Y, es gibt also eine offene Umgebung W_k von k mit $g(W_k) \subseteq K(g(k), \frac{\gamma}{2})$ und somit $g(\overline{W}_k) \subseteq K(g(k), \gamma)$. $\overline{W}_k \cap K$ ist kompakt.

  $(W_k)_{k \in K}$ ist eine offene Überdeckung von K, d.h. es reichen endlich viele $W_{k_i} =: W_i$, $i = 1, \ldots, m$. Setze $V := V_{\overline{W}_1 \cap K, K(g(k_1),\gamma)} \cap \ldots \cap V_{\overline{W}_m \cap K, K(g(k_m),\gamma)}$. V ist offen bzgl. der Kompakt-Offen-Topologie (sogar ein Basiselement). Wegen $g(\overline{W}_i) \subseteq K(g(k_i), \gamma)$ $(i = 1, \ldots, m)$ ist $g \in V$.

  Wir zeigen nun $V \subseteq B_K(f,r)$. Dazu seien $h \in V$ und $k' \in K$. Da $(W_i)_{i=1,\ldots,m}$ eine offene Überdeckung von K ist, gilt $k' \in W_i$ für ein i, also $g(k') \in g(W_i) \subseteq K(g(k_i), \frac{\gamma}{2})$ und somit $d(g(k'), g(k_i)) < \frac{\gamma}{2}$. Wegen $h \in V \subseteq V_{\overline{W}_i \cap K, K(g(k_i),\gamma)}$ gilt $h(k') \in h(\overline{W}_i \cap K) \subseteq K(g(k_i), \gamma)$ und somit $d(h(k'), g(k_i)) < \gamma$. Außerdem gilt $d(f(k'), g(k')) \leq \sup\limits_{k \in K} d(f(k), g(k)) = d$. Insgesamt erhalten wir mit der Dreiecksungleichung $d(h(k'), f(k')) \leq d(h(k'), g(k_i)) + d(g(k_i), g(k')) + d(g(k'), f(k')) < \gamma + \frac{\gamma}{2} + d = \frac{3r+d}{4}$.

  $\Rightarrow \sup\limits_{k' \in K} d(h(k'), f(k')) \leq \frac{3r+d}{4} < r \Rightarrow h \in B_K(f,r)$ $\square$