AG-Programm Sommersemester 2007

Étale Kohomologie

Vorträge

Die Hauptquelle für fast alle Vorträge unserer AG wird [Tamd] sein, ein von Günter Tamme aus einer Vorlesung 1975/1976 ausgearbeitetes Skriptum, das aufbauend auf Grundlagen in algebraischer Geometrie und auch etwas algebraischer Zahlentheorie die étale Kohomologietheorie einführt. Inhaltsgleich ist eine Übersetzung ins Englische aus dem Jahr 1994, [Tame]. Wenn nicht anders angegeben, werden Referenzierungen immer auf Textstellen in [Tamd] verweisen.

1 Kategorien und Sequenzen Dieser Vortrag umfasst das gesamte Kapitel 0. Zunächst wiederholen wir ein wenig Kategorientheorie und führen den Begriff der abelschen Kategorien ein. Wir erinnern an injektive Objekte, ∂-Funktoren, abgeleitete Funktoren, Spektralsequenzen und induktive Limites. *Dieser Vortrag ist nicht schwer, erfordert jedoch etwas Übersicht, da recht viel Stoff verständlich zusammengefasst werden soll.*

2 Der Grothendieck'sche Topologiebegriff Wir definieren mit Grothendieck den Begriff der Topologie bzw. des Situs als die Objekteklasse einer Kategorie zusammen mit bestimmten Morphismen (Überdeckungen) und betrachten für eine Gruppe G die kanonische Topologie der Kategorie der G-Linksmengen mit G-Abbildungen als Morphismen. Das ist Abschnitt I.1. *Ein eher kurzer Vortrag. Der Begriff des Situs ist zentral und soll gründlich eingeführt werden. Weiterführende Literatur wäre [GOD] und [SGA3].*

3 Čech-Kohomologie Wir führen die Kategorie der abelschen Prägarben auf einem Situs ein. Zunächst für Überdeckungen, dann über einen Limesprozess für beliebige Elemente der Topologie definieren wir die Čech-Kohomologie. Schließlich finden wir einen Funktor, dessen Rechtsableitung gerade die Čech-Kohomologiegruppen sind. Das ist Abschnitt I.2. *Wieder mehr Stoff, aber keine besondere Schwierigkeit.*

4 Abelsche Garben Wir finden den linksadjungierten Funktor zur Inklusion der Kategorie $\underline{S}$ der abelschen Garben auf einer Topologie in die Kategorie der abelschen Prägarben dazu. Das Bild einer Prägarbe F unter diesem Funktor nennen wir die assoziierte Garbe $F^{\#}$. Wir zeigen, dass $\underline{S}$ eine abelsche Kategorie und $\#$ exakt ist. Schließlich definieren wir noch die Garbenkohomologie im abelschen Fall. Der Vortrag umfasst die Abschnitte I.3.1 bis I.3.3. Weiterführende Literatur ist [GOD], Kapitel IV. *Der Vortrag enthält nette Beweise, dafür aber auch noch den etwas künstlich angehängten letzten Teil über die Kohomologie. Sollte gut zu schaffen sein.*

5 Die Spektralsequenz für die Čech-Kohomologie Wir konstruieren die Spektralsequenz für die Čech-Kohomologie, um den Zusammenhang zwischen Čech-Kohomologie und Garbenkohomologie zu untersuchen. Wir studieren die Auswirkungen der Welkheit von Garben auf die Kohomologie und funktoriellen Topologiewechsel. Schließlich führen wir die Leray'schen Spektralsequenzen ein; hier kennen wir als Spezialfall aus der AG im letzten Semester die Hochschild-Serre Spektralsequenz. Das sind die Abschnitte I.3.4 bis I.3.7. Siehe auch [GOD], Kapitel II. *Dieser Vortrag ist sicherlich einer der umfangreicheren. Eventuell können wir in Abschnitt I.3.6 etwas sparen. In I.3.7 dürfte einiges bekannt sein.*

6 Noethersche Topologien und pseudo-filtrierende Kategorien Zuerst wird die Kohomologie für die Kategorie der Z-Objekte einer Topologie T studiert, siehe dafür I.3.8 und [EGA1], 0_{I}, 1.1.11. Dann zeigen wir das Vergleichslemma, das uns ermöglicht, Kohomologie bezüglich verschiedener Topologien zu vergleichen (*sic!*). Wir betrachten den Spezialfall der noetherschen Topologien (siehe hier auch [SGA4], exposé VI). Schließlich zeigen wir, dass Kohomologiebilden als Funktor mit pseudo-filtrierenden induktiven Limites vertauscht. Das sind die Abschnitte I.3.8 bis I.3.11. *Ein Potpourri aus mehreren kleinen in sich abgeschlossenen Themen, nicht allzu lang, benötigt allerdings recht viel von dem vorigen Stoff.*

7 Der étale Situs eines Schemas Dieser Vortrag schließt in gewisser Weise an den zweiten Vortrag an. Wir betrachten den Spezialfall des étalen Situs und vergleichen étale Kohomologie mit Zariski-Kohomologie. Einige Ergebnisse der vorherigen Vorträge werden für den étalen Situs noch einmal betrachtet. Am Ende betrachten wir noch als Beispiel étale Morphismen für das Spektrum eines Körpers. Das sind die Abschnitte II.1 bis II.2. Dann werden in II.3.1 noch ein paar konkrete Beispiele geliefert. *Dieser Vortrag ist wohl eher leicht. Der/Die Vortragende sollte sich aber ergänzend noch ein bisschen in Kapitel 17 von [EGA4] umschauen. Die in II.3.1 verwendete Descente-Theorie (s. [SGA1], exposé VIII, 5.3) nehmen wir allerdings als Blackbox hin.*

8 Artin-Schreier und Kummer Nun lernen wir, wie man Modulgarben étalisiert und was der große étale Situs ist. Das nutzen wir aus, um Zariski-Kohomologiegruppen mit étalen Kohomologiegruppen zu identifizieren (wobei wir ein weiteres Mal Hinweise auf Descente-Theorie ignorieren). Wenn wir als zugrundeliegendes Schema einmal die additive Gruppe und einmal die multiplikative Gruppe wählen, können wir die Exaktheit zuerst der Artin-Schreier-Sequenz und dann der Kummer-Sequenz zeigen. Das sind II.3.2 bis II.4. Sinnvoll ist auch ein Blick in [SGA1], [EGA1], [EGA4] und irgendein Buch, in dem etwas über Brauergruppen steht. *Von der vielleicht etwas langen Literaturliste sollte man sich nicht abschrecken lassen, meist sind dort nur einzelne Sätze referenziert. Schön wäre allerdings, wenn der/die Vortragende schon einmal etwas von Artin-Schreier-Theorie und Kummertheorie gehört hätte und Zusammenhänge motivieren könnte.*

9 Halme étaler Garben Der Halm einer Garbe in einem geometrischen Punkt wird definiert. Wir zeigen erste Eigenschaften. Das ist Abschnitt II.5. *Ein kurzer und recht leichter Vortrag, allerdings davon bedroht, vom vorherigen Vortrag noch II.4.5 aufgebrummt zu bekommen, falls jener zu lang wird.*

10 Strikte Lokalisierungen Dieser Vortrag verweist dezidiert auf [EGA4]. In [Tamd] umfasst er die Abschnitte II.6. und II.7. Zunächst werden henselsche Ringe eingeführt, das könnte bekannt sein. Ein Spezialfall sind die strikt lokalen Ringe, die anschließend studiert werden. Wir nutzen unser Wissen über strikte Henselisierungen von Ringen um den Begriff der strikten Lokalisierung eines Schemas einzuführen. Dann untersuchen wir die étale Kohomologie auf projektiven Limites von Schemata, um schließlich die Halme der von bestimmten Rechtsableitungen zu bestimmen. Zuletzt untersuchen wir einen Spezialfall der Leray'schen Spektralsequenz, die Artin'sche Spektralsequenz. *Etwas länger und nicht ganz ohne.*

11 Der Zerlegungssatz Der Zerlegungssatz studiert die Kategorie der abelschen Garben auf $X_{\text{ét}}$. *Dieser vergleichsweise monolithische Vortrag umfasst II.8. Es gibt Verweise auf [SGA4] und [EGA4].*

12 Torsionsgarben, lokal konstante Garben und konstruierbare Garben Wir führen die im Titel genannten Typen von Garben ein und spielen ein wenig damit. Für eine Primzahl ℓ wird die ℓ-kohomologische Dimension eingeführt, was uns einmal mehr an das letzte Semester erinnert. Das ist Abschnitt II.9. *Dieser (sicher wieder etwas längere) Vortrag bietet einen Strauß von Propositionen an, die jeweils recht schnell zu beweisen sind. Diverse Links auf die* *verschiedenen Bände von EGA und SGA können, müssen aber nicht, zu einer Andickung des Vortrags dienen.*

13 Étale Kohomologie auf Kurven In diesem Vortrag wenden wir schließlich einiges des vorher gelernten auf den Spezialfall einer Kurve an. Wir bestimmen die kohomologische Dimension und beweisen den Endlichkeitssatz für konstruierbare Garben. Das ist Abschnitt II.10. *Die Beweise in diesem Abschnitt sind alle ziemlich explizit und die Ergebnisse von befriedigender Schönheit. Ein Wermutstropfen ist, dass der recht lange Beweis des Endlichkeitssatzes vielleicht den Rahmen des Vortrags sprengt und daher möglicherweise nicht präsentiert werden kann.*

14 Ausblick (Ein Märchen) Außer den in II.11 dargelegten Ergebnissen der étalen Kohomologietheorie werden in diesem Vortrag einige Anwendungen dieser Theorie (ohne viel Beweise) vorgeführt. Die genaue Ausgestaltung bleibt dem Vortragenden überlassen. *Braucht jemanden, der sich damit auskennt...*

Literatur

[EGA1] A. Grothendieck, J. A. Dieudonné. *Éléments de Géométrie algébrique 1*. Springer Verlag, .

[EGA4] A. Grothendieck, J. A. Dieudonné. *Éléments de Géométrie algébrique 4*. Publ. Math. I. H. E. S., .

[GOD] R. Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, .

[SGA1] A. Grothendieck. *Revêtements Étales et Groupe Fondamental.*

[SGA3] M. Demazure, A. Grothendieck. *Schemas en groupes.*

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck, J. L. Verdier. *Théorie des Topos et Cohomologie étale des Schémas.*

[Tamd] G. Tamme. *Einführung in die étale Kohomologie*. Der Regensburger Trichter, Nr. **17**. Fakultät für Mathematik der Universität Regensburg, 1979.

[Tame] G. Tamme. *Introduction to Étale Cohomology*. Universitext, Nr. . Springer Verlag, 1994.