Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

Programm zur AG Algebraische Zahlentheorie/Algebraische Geometrie

im Wintersemester 2010/2011

Expander und das Ruziewicz-Banach-Problem

1. **Expander-Graphen und das Banach-Ruziewicz-Problem** (André Kappes)
   [Lub94, Kap. 1, 2.2]
   In diesem Vortrag sollen die beiden Probleme, um die es in der AG geht, also das Konstruktionsproblem für Expander-Graphen und das Banach-Ruziewicz-Problem vorgestellt werden (s. auch S.ix in Kap.0). Zunächst werden Expander-Graphen über verschiedene Definitionen (u.a. mittels Cheeger-Konstanten) eingeführt. Es wird gezeigt, dass „die meisten " Graphen Expander sind. Dann wird das Banach-Ruziewicz-Problem für $n = 1$ gelöst. Hierfür werden amenable Gruppen und invariante Mittelwerte für lokal-kompakte Gruppen eingeführt.

2. **Das Hausdorff-Banach-Tarski-Paradoxon** (Diego De Filippi)
   [Lub94, Kap. 2.1]
   Das Paradoxon besagt, dass eine Sphäre S^n in endlich viele Teilmengen zerlegt werden kann, die nach Rotation zu mehreren Kopien von S^n zusammengesetzt werden können. Dies funktioniert für jedes $n \geq 2$, was in diesem Vortrag gezeigt werden soll. Dazu wird zunächst mithilfe von etwas elementarer Zahlentheorie und Quaternionen-Algebren die Anzahl von ganzzahligen Punkten auf der Mittelpunkts-Sphäre S^n mit Radius $\sqrt{n}$ bestimmt. Damit kann gezeigt werden, dass $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ die freie Gruppe F_2 in zwei Erzeugern als Untergruppe hat. Damit wiederum kann das Paradoxon zunächst für $n = 2$ und dann gleich für alle $n \geq 2$ gezeigt werden.

3. **Kazhdans Eigenschaft T** (Jochen Schröder)
   [Lub94, Kap. 3.1, 3.2]
   Wir betrachten für eine lokalkompakte Gruppe G die Menge der unitären (irreduziblen) Darstellungen und führen darauf die Fell-Topologie ein. Damit können wir Kazhdans Eigenschaft **T** definieren sowie schwache Inklusion zwischen Darstellungen. Ein Höhepunkt des Vortrags ist der Beweis für die Äquivalenz verschiedener Beschreibungen von Amenabilität (definiert in Vortrag 1). Mithilfe derer erhält man direkt, dass nichtabelsche freie Gruppen und $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ weder amenabel noch Kazhdansch sind, und mit ein bisschen weiterer Arbeit, dass $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ hingegen Kazhdansch ist. Schließlich wollen wir noch Gitter in halbeinfachen Liegruppen konstruieren. Der Satz von Borel sagt uns, wie das geht. Wir wenden ihn für eine Reihe von Beispielen an und untersuchen, wann die konstruierten Gitter die Eigenschaft **T** haben.

4. **Zwischenlösungen mithilfe der Eigenschaft T** (Myriam Finster)
   [Lub94, Kap.3.3,3.4]
   In diesem Vortrag werden mithilfe von Kazhdanschen Gruppen erste Lösungen für unsere beiden Probleme gefunden: Es wird gezeigt, wie man unendliche Familien von Expander-Graphen konstruieren kann, und das Banach-Ruziewicz-Problem wird für $n \geq 4$ gelöst.
   Konstruktionen von Margulis und Alon/Milman liefern explizite Expander-Familien. Dabei werden Nebenklassen-Graphen von Untergruppen (von endlichem Index) in Kazhdanschen Gruppen verwendet. Dieselbe Konstruktion stattdessen mit amenablen Gruppen ergibt dagegen immer Nicht-Expander-Familien. Für das Banach-Ruziewicz-Problem werden wir e.e. dichte Kazhdansche Untergruppen Γ von $SO(n)$ verwenden und unitäre Darstellungen davon betrachten. Wir finden eine Bedingung, dass es einen eindeutigen invarianten Mittelwert auf $L^\infty(S^n)$ gibt. Schließlich wollen wir noch verstehen, warum dieselben Argumente nicht für $n < 4$ funktionieren. Dazu lernen wir einige Eigenschaften von Kazhdanschen Gruppen kennen, z.B. dass sie bei inversionsfreien Aktionen auf lokal-endlichen Bäumen immer einen globalen Fixpunkt haben.

5. **Der Laplace-Operator für Graphen und seine Eigenwerte** (Florian Nisbach)
[Lub94, Kap.4.1, 4.2]
In den nächsten beiden Vorträgen wird gezeigt, dass von den minimalen positiven Eigenwerten des Laplace-Operators abgelesen werden kann, ob eine Expander-Familie vorliegt.
Zunächst wird an Definition und einige Eigenschaften des „klassischen“ Laplace-Operators für Riemannsche Mannigfaltigkeiten erinnert. Insbesondere kann der kleinste positive Eigenwert mittels der Cheeger-Konstante nach unten abgeschätzt werden. Dann führen wir den kombinatorischen Laplace-Operator für Graphen ein, der für reguläre Graphen direkt durch die Adjazenzmatrix bestimmt ist. Es gelten ähnliche Abschätzungen wie im klassischen Setting; insbesondere werden der kleinste positive Eigenwert λ_1 des Laplace-Operators und die Cheeger-Konstante des Graphen durch Abschätzungen zueinander in Relation gestellt.

6. **Eigenwerte des Laplace und Ramanujan-Graphen** (Thomas Willging)
[Lub94, Kap.4.3 - 4.6]
Der durch den letzten Vortrag vorbereitete Zusammenhang zwischen Laplace und Familien von Expandern wird zu einem Satz gemacht: Familien von Cayleygraphen von endlichen Quotienten einer e.e. Gruppe Γ sind Expander gdw. die Cheeger-Konstanten bzw. äquivalent dazu die Eigenwerte λ_1 der Laplace-Operatoren durch eine Konstante nach unten beschränkt sind. Hierzu gibt es einige Beispiele. Als Anwendung erhalten wir einen ganz kurzen Beweis mithilfe des Satzes von Selberg, dass die Nebenklassengraphen der Hauptkongruenzgruppen (mit primen Level) eine Familie von Expandern bilden. In einem weiteren konkreten Beispiel werden Kongruenzgruppen in der Dreiecksgruppe $\Delta(4,4,4)$ betrachtet und für die damit konstruierte Familie sogar eine explizite Konstante angegeben. Schließlich wenden wir uns Random Walks zu. Eine Abschätzung nach unten für die maximalen interessanten Eigenwerte der Adjazenzmatrix (approximiert in unendlichen Familien) führt zur Definition von Ramanujan-Graphen. Die Konstruktion von Alon/Milman aus Vortrag 4 liefert keine Ramanujan-Graphen. Ein Hauptziel der weiteren Vorträge ist es, eine Konstruktion für solche Familien zu finden. Als netter Abschluss zeigt ein ganz kurzer Beweis, dass die Z-Funktion eines Graphens (wird hier definiert) die Riemannsche Vermutung erfüllt gdw. der Graph ein Ramanujan-Graph ist.

7. **Darstellungen von $\mathbf{PGL_2}$** (Jonas Grüner)
[Lub94, Kap. 5.1, 5.2]
In diesem und dem nächsten Vortrag wollen wir die irreduziblen Darstellungen der beiden Gruppen $G_\infty = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ und $G_p = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ persönlich kennenlernen. Wir bezeichnen die beiden Gruppen jeweils als G; K ist jeweils maximal kompakte Untergruppe von G. Erstes Etappenziel ist es, plausibel zu machen, dass die irreduziblen unitären Darstellungen von G, die einen K-invarianten Vektor besitzen, bijektiv den positiv definiten sphärischen Funktionen $\varphi : G \to \mathbb{C}$ entsprechen. Anschließend betrachten wir zunächst den Fall $G = G_\infty = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, $K = \mathrm{PSO}_2$. G/K ist dann die obere Halbebene $\mathbb{H}$ und die zu einer Darstellung mit K-invariantem Vektor gehörende sphärische Funktion ϕ ist Eigenfunktion des Laplace-Operators. Der zugehörige Eigenwert λ verrät uns, ob die Darstellung zur Hauptreihe oder zur Nebenreihe gehört. Die Darstellungen der Hauptreihe liegen bezüglich der Fell-Topologie uniform weit weg von der trivialen Darstellungen ρ_0, wohingegen die Darstellungen der Nebenreihe gegen ρ_0 konvergieren.
Zur Vorbereitung des Vortrags sollte man wohl z.B. [Lan85] zu Hilfe nehmen.

8. **Darstellungen von $\mathbf{PGL_2(\mathbb{Q}_p)}$** (Claus-Günther Schmidt)
[Lub94, Kap. 5.3 - 5.5]
In diesem Vortrag werden nun die Darstellungen von $G = G_p$ untersucht. Maximal kompakte Untergruppe ist nun $K = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}_p)$. G/K ist der Bruhat-Tits Baum X. Dieser wird hierzu in geeigneter Weise explizit beschrieben: die Ecken sind Äquivalenzklassen von Gittern, die Kanten stehen für spezielles Enthaltensein. Für X wird der Hecke-Operator δ definiert, der eng mit dem Laplace-Operator Δ zusammenhängt. Für die unitären irreduziblen Darstellungen erhalten wir nun Ergebnisse analog zu denen in Vortrag 7. Als direkte Anwendung erhalten wir eine zur Selberg-Vermutung äquivalente Formulierung über Darstellungen von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ aus der Nebenreihen. Das p-adische Analogon ergibt einen Zusammenhang zwischen Darstellungen von $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ und Ramanujan-Graphen, die Quotienten des Bruhat-Tits-Baums sind.

9. **Der Satz von Deligne und eine verallgemeinernde Vermutung** (Petra Forster)
[Lub94, Kap. 6]
Zunächst führen wir (mal wieder) den Ring der Adele ein und lernen den Satz von Deligne in einer darstellungstheoretischen Fassung kennen. Es geht um irreduziblen Unterdarstellungen von $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ in $L^2(\Gamma\backslash G)$, wobei $\Gamma = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$ ist. Eine Verallgemeinerung des Satzes, die bisher

allerdings eine Vermutung ist, besagt, dass für alle solchen Darstellungen ρ die Komponenten ρ_p (p Primzahl) nicht aus der Nebenreihe der $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Darstellungen sind. Ein Ziel des Vortrags ist es zu sehen, dass die Selberg-Vermutung ebenfalls ein Spezialfall davon ist. Vorher lernen wir allerdings noch die Jacquet-Langlands-Korrespondenz kennen, die wir als Werkzeug für den nächsten Vortrag brauchen. Eventuell kann noch der Satz aus 7.1 hinzugenommen werden.

10. **Lösung der Probleme** (Gabriela Weitze-Schmithüsen)
    [Lub94, Kap. 7.1-7.3(z.T.)]
    Wir basteln ausgehend von einer Quaternionen-Algebra D eine algebraische Gruppe G', die unsere eierlegende Wollmilchsau für die AG sein wird. $G'(\mathbb{R}) \times G'(\mathbb{Q}_p)$ ist isomorph zu $\mathrm{SO}(3)\times\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (für richtig gewähltes p) und $\Gamma = G'(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ ist ein kokompaktes Gitter darin. Weiterhin definieren wir Kongruenzgruppen $\Gamma(n)$ in Γ. Die in Vortrag 9 entwickelte Maschinerie auf diese Situation angewendet gibt uns ein Werkzeug, mit dem wir den Satz von Drinfeld beweisen, der das Banach-Ruziewicz-Problem für die beiden verbleibenden Fälle $n = 2$ und $n = 3$ beantwortet. Hierzu projizieren wir die Gruppe Γ in $\mathrm{SO}(3)$ und müssen zeigen, dass ihre Darstellung auf $L^2_0(S^2)$ nicht die triviale Darstellung schwach enthält. Mithilfe des Bildes der $\Gamma(N)$ in $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ konstruieren wir schließlich Ramanujan-Graphen, also eine besonders tolle Expander-Familie. Als eine ihrer guten Eigenschaften kann z.B. die Taille der Graphen nach unten abgeschätzt werden.

11. **Explizite Konstruktionen für Ramanujan-Graphen** (Frank Herrlich)
    [Lub94, Kap. 7.2]
    Zunächst können noch weitere Eigenschaften der in Vortrag 10 konstruierten Familie von Ramanujan-Graphen z.B. zur chromatischen Zahl, zum Durchmesser und zur Stabilitätszahl gezeigt werden. Dann werden für den Spezialfall der Hamiltonschen Quaternionen-Algebra $D = D(1, 1)$ die Graphen explizit bestimmt. Es sind Cayley-Graphen von uns sehr vertrauten Gruppen. Eine weitere Konstruktion von Morgenstern führt mit ähnlichem Vorgehen zu weiteren Familien von Ramanujan-Graphen. Falls noch Zeit bleibt, können hier zum Abschluss noch einige der offenen Probleme aus Kapitel 10 vorgestellt werden.

An dieser Stelle haben wir beide Probleme gelöst und damit das Ziel der AG erreicht. In den folgenden Vorträgen geht es um damit verbundene Themen, die den bisherigen Inhalt gut ergänzen würden, aber optional sind.

12. **Weitere Anwendungen und Konstruktionen von Ramanujan-Graphen**
    [Lub94, Kap. 8 (Auswahl)]
    Der Satz von Selberg und die Eigenschaft **T** kann verwendet werden, um als überraschende Anwendungen Ergebnisse ähnlich zum Satz von Babai-Kantor-Lubotzky zu zeigen. Dieser besagt, dass es für jede einfache nicht-abelsche endliche Gruppe eine Menge von höchstens sieben Erzeugern gibt, so dass jedes Gruppenelement höchstens Wortlänge $O(\log|G|)$ hat. Im zweiten Teil wird vorgestellt, wie Darstellungstheorie (insbesondere Charakter-Tafeln) verwendet werden kann, um Eigenwerte der Adjazenzmatrix von Cayley-Graphen endlicher Gruppen zu bestimmen. Es werden weitere Beispiele für Ramanujan-Graphen gefunden. In einem dritten Teil, werden Konstruktionen für Familien von Ramanujan-Graphen, für die der Grad aber nicht beschränkt ist, vorgestellt. Im letzten Teil werden als Verallgemeinerung von Ramanujan-Graphen Ramanujan-Diagramme eingeführt, bei denen Ecken und Kanten bewertet sind. Diese führen zu neuen, interessanten Konstruktionen.
    Zu diesen Inhalten kann man je nach Interesse mehrere voneinander unabhängige Vorträge machen.

13. **Verteilung von Punkten auf der Sphäre** [Lub94, Kap. 9]
    In diesem Vortrag geht es um das Problem, eine große Anzahl zufälliger Gruppenelemente zu erzeugen. Hier werden die Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ und $\mathrm{SP}(4)$ betrachtet. Dies hängt eng damit zusammen, eine große Anzahl von Punkten auf der Sphäre gleichmäßig zu verteilen. Dieses Problem kann man mithilfe z.B. des Satzes von Deligne lösen. Wie das geht, lernt man in diesem Vortrag.

14. **Satz von Selberg** (Stefan Kühnlein)
    Der Satz von Selberg besagt, dass für Kongruenzuntergruppen Γ von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ der erste Eigenwert λ_1 des Laplace größer oder gleich $\frac{3}{16}$ ist. Nach der Selberg-Vermutung ist er sogar größer oder gleich $\frac{1}{4}$. In diesem Vortrag könnte der Beweis des Satzes und/oder Verallgemeinerungen aus neuerer Zeit z.B. für GL_3 und GL_4 von Sarnak bzw. Elstrodt/Grunewald/Mennicke vorgestellt werden. Als Literaturgrundlage könnte z.B. [Sel65], [Iwa02], [EGM90], [CLPSS91] dienen. Es werden Vorkenntnisse zu automorphen Formen empfohlen.

Literatur

[CLPSS91] J. Cogdell, J.-S. Li, I. Piatetski-Shapiro, and P. Sarnak, *Poincaré series for* $\mathrm{SO}(n, 1)$, Acta Math. 167, No.3-4 (1991), 229–285.

[EGM90] J. Elstrodt, F. Grunewald, and J. Mennicke, *Kloosterman sums for Clifford algebras and a lower bound for the positive eigenvalues of the Laplacian for congruence subgroups acting on hyperbolic spaces*, Invent. Math. 101, No.3 (1990), 641–685.

[Iwa02] Henryk Iwaniec, *Spectral methods of automorphic forms*, Graduate Studies in Mathematics. 53. (AMS), 2002.

[Lan85] Serge Lang, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, Springer-Verlag, 1985.

[Lub94] Alexander Lubotzky, *Discrete Groups, Expanding Graphs and Invariant Measures*, Birkhäuser, 1994.

[Sel65] Atle Selberg, *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms*, Proc. Sympos. Pure Math. 8 (1965), 1–15.