AG Motivische Homotopietheorie im WS 2012/2013

Vorträge 1-5 sind rein topologisch und das Gros ist Wiederholung, 6-9 behandeln Morel-Voevodsky's motivische stabile Homotopietheorie auf Basis von (simplizialen) Nisnevich-Garben, 12 behandelt Voevodsky's motivische Komplexe und die daraus resultierende Konstruktion der abgeleiteten Kategorie der effektiven Motive, was wichtig für den zweiten Teil seines Beweises der Milnor-Vermutung ist, welcher den Vorträgen 10-15 vorbehalten bleibt.

Hauptquelle für 1-9 ist [1]. Entsprechend der drei in loc. cit. behandelten Lectures sprechen wir dort von Teil 1, 2 und 3. Für 6-9 siehe auch [4]. Für 10-15 verwenden wir [8], für 12 zusätzlich [3, 7]. Wir setzen Grundlagen über triangulierte und abgeleitete Kategorien voraus, was jedoch lediglich in den Vorträgen 7,12-14 verwendet wird.

1. **Grothendiecktopologien.** In unserem ersten Vortrag werden Grothendieck-Topologien (Prätopologien, Siebe) und die dazugehörigen Topoi (Kategorien von Garben) ‚wiederholt', und insbesondere die für uns wichtigen *Zariski, Nisnevich-, étalen Siten* eingeführt. Teil 2, Kapitel II in [1], mit Schwerpunkt auf Abschnitt 9. Eine Quelle mit anderem Schwerpunkt, aber trotzdem als Einführung ganz gut geeignet ist Abschnitt 2.3 in [5].

2. **Topologische Grundlagen.** Dieser Vortrag wiederholt die grundlegenden Konstruktionen der AG aus dem letzten Semester (*Simpliziale Mengen, schwache Äquivalenz*). Wir legen besonderen Wert auf die *simplizialen abelschen Gruppen.* In [1] handelt es sich um Kapitel I in Teil 1, Abschnitte 1-4, Seiten 5-18, sowie um Kapitel II, Abschnitt 0.1, Seiten 28-29.

3. **Topologische Spektren.** Hier wird exemplarisch das *Sphärenspektrum* eingeführt, und *stabile Homotopiegruppen* definiert. Letztere gehen auf den Suspensionssatz von Freudenthal [2] zurück, welcher insbesondere besagt, daß die Suspensionsabbildung

$$\pi_{n+k}(S^n) \to \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$$

auf den Homotopiegruppen der Sphären für alle $n > k+1$ ein Isomorphismus ist. Stabile Homotopietheorie hängt von der gewählten kompatible Folge von Suspensionen ab (in diesem Beispiel $(\cdot \wedge S^k)_{k \geq 0}$), und genau diese Information kodiert ein Spektrum. Es sollte insbesondere Wert darauf gelegt werden, wie man aus einem topologischen Spektrum *Homologie* und *Kohomologie* extrahiert. In unsere Hauptquelle ist das Teil 1, Kapitel I, Abschnitte 5-6, Seiten 18-25.

4. **Faserungen und kombinatorische Homotopiegruppen.** Dieser Vortrag ist im Wesentlichen wieder eine Wiederholung bereits bekannten Stoffes aus der letzten AG: *(Co-)Faserungen, Hebungseigenschaften*, das *Small Object Argument* (wieder im Rahmen des *Faktorisierungssatzes*), *Satz von Whitehead* (d.h. eine schwache Äquivalenz zwischen fasernden Objekten ist eine Homotopieäquivalenz). Weiterhin

werden *kombinatorische Homotopiegruppen* wiederholt. Das ist Kapitel II aus Teil 1, Seiten 27-40, abgesehen des Teils, welcher bereits in Vortrag 2 behandelt wurde.

5. **Modellkategorien.** Das Gros ist Wiederholung, jedoch nicht alles. Es geht um *Modellkategorien, Quillen-Funktoren*, und insbesondere um *stabile Homotopietheorie*. Kapitel III aus Teil 1, Seiten 41-53.

6. **Nisnevich-Garben.** Die bereits im vorigen Vortrag verwendete Aussage, daß eine Basis der Nisnevich-Topologie durch die oberen ausgezeichneten Quadrate gegeben ist, soll hier bewiesen werden. Weiterhin werden *halmweise schwache Äquivalenzen* eingeführt, und zwei weitere Charakterisierungen derselbigen diskutiert, *kombinatorische schwache Äquivalenzen* eingeführt, und Morel-Voevodsky's *Nisnevich-Abstiegssatz* glaubhaft gemacht. Es wird Definition 2.18 aus dem nächsten Vortrag vorgezogen, der Hauptteil ist Appendix des Teil 3, Abschnitt 5.1, Seiten 172-180. Was wir sonst aus dem Appendix brauchen muß importiert werden. Weitere Quelle ist [4].

7. **Stabile motivische Homotopietheorie.** Wir führen die *Kategorie der Räume* als die Kategorie der Nisnevich-Garben mit Werten in simplizialen Mengen ein. Dann induziert das Smash-Produkt der simplizialen Mengen eines auf der Kategorie der Räume, was es uns erlaubt zwei verträgliche Suspensionsrichtungen definieren: bezüglich der *simplizialen* 1*-Sphäre* S^1_s und bezüglich des *Tatekreises* S^1_t, welcher dem Schema GL_1, punktiert bei 1, entspricht. Zunächst stabilisieren wir entlang S^1_s, und erhalten die motivische s-stabile Homotpiekategorie $\mathrm{SH}^{\mathbb{A}^1}_s(k)$, in welche insbesondere so gebaut ist, daß die affine Gerade $\mathbb{A}^1$ kontrahierbar ist. In einem nächsten Schritt wird zusätzlich entlang S^1_t stabilisiert, und wir erhalten die *stabilisierte motivische Homotopiekategorie* $\mathrm{SH}(k)$ über dem Körper k. Diese Kategorie ist additiv, und wir definieren eine *triangulierte Struktur* auf $\mathrm{SH}(k)$, welche mit ausgezeichneten oberen Quadraten verträglich ist. Teil 3, Seiten 148-159.

8. **Motivische Spektren, Kohomologien, und Thomräume.** Hier sollen einige motivische Spektren angeleuchtet werden: das *motivische Eilenberg-MacLane-Spektrum* $\mathbf{H}\mathbb{Z}$, das *algebraische* K*-Theorie-Spektrum* **KGL**, sowie das *algebraische Kobordismus-Spektrum* **MGL**. Um letzteres zu verstehen, benötigen wir *Thom-Räume*, welche am Ende des Abschnitts 2.3 auf Seiten 160-161 diskutiert werden, zusammen mit dem *Homotopie-Reinheits-Satz*. Die obigen Spektren werden im Abschnitt 3, Seiten 162-166 definiert.

9. **Die Slice-Filtrierung.** Die Kategorie $\mathrm{SH}(k)$ läßt sich in gewissem Sinne durch kleinere *Slices* ausschöpfen, was dazu führt, daß sich (s,t)-Bispektren ebenfalls in Slices zerlegen lassen. Dieser Prozeß verallgemeinert Postnikov-Türme und ist ebenso fundamental wie sie. Es ranken sich grundlegende Vermutungen um den Zusammenhang der

verschiedenen Slices der verschiedenen Spektren. Beispielsweise ist in Charakteristik 0 (bzw. im Fall k perfekt) die 0-te Slice des Sphärenspektrums gleich $\mathbf{H}\mathbb{Z}$, was vermutlich auch in positiver Charakteristik gilt. Den Charakteristik-0-Fall wollen wir einsehen. Analog ist vermutlich die 0-te Slice von **KGL** ebenfalls $\mathbf{H}\mathbb{Z}$. Am Ende des relevanten Abschnittes sehen wir schließlich den vermutlichen Zusammenhang zur algebraischen K-Theorie in Gestalt der (hier vermuteten) *Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz*. Abschnitt 4 aus Teil 3, Seiten 166-171.

10. **Die Grad-Abbildung in der motivischen Kohomologie.** Hier geht es um die Konstruktion einer kanonischen *Gradabbildung*

$$\deg : \ H^{2d,d}(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z},$$

auf der motivischen Kohomologie einer glatten projektiven Varietät X/k der (reinen) Dimension d, welche in gewisser Weise durch das Auswerten auf einer Fundamentalklasse gegeben ist, bzw. die gleichen Eigenschaften hat. Dies ist Proposition 2.5 aus Abschnitt 2 in [8]. Weiterhin wollen wir Theorem 2.11 verstehen, was auf Proposition 2.7 reduziert werden kann. Alles in allem Seiten 63-72 in [8].

11. **Die Steenrod-Algebra der motivischen Kohomologie.** In diesem Vortrag geht es um das Analogon der Steenrod-Algebra in der motivischen Kohomologie bzw. genauer um die von den *Milnor-Primitiven* Q_i erzeugte Unteralgebra. Dies wird ausführlich in [9] diskutiert, wir haben jedoch leider nicht die Zeit, hierauf genauer einzugehen. Stattdessen müssen wir uns auf die fundamentalen Eigenschaften und Aussagen in den Abschnitten 13 und 14 konzentrieren, welche für unsere wichtigsten Anwendungen in Abschnitt 3 in [8] wesentlich sind. Das sind das Theorem 3.2 (und Proposition 3.6), sowie das Corollary 3.8. Letzterer umfaßt die dortigen Seiten 72-77.

12. **Effektive motivische Komplexe.** In Analogie zu Grothendiecks ursprünglicher Definition der Kategorie der Motive über k via Korrespondenzen, konstruiert Voevodsky in [7] die triangulierte Kategorie $\mathrm{DM}_-^{\mathrm{eff}}(k)$ der *effektiven motivischen Komplexe* über k, welche in Analogie mit der klassischen *Hurewicz-Abbildung* mit $\mathrm{SH}(k)$ zusammenhängt (und tatsächlich die ‚richtige Kategorie' ist, sofern die *Vanishing-Conjecture* zutrifft). Wir haben leider keine Zeit, auf diese Konstruktionen einzugehen, weswegen wir lediglich kurz auf die Definition und etwas genauer auf die Eigenschaften aus Abschnitt 9 in [3], sowie Abschnitt 2 in [7] eingehen können, jedoch ohne Beweise. Die *Beilinson-Lichtenbaum-Vermutung* sowie die *Vanishing-Conjecture* sollten ebenfalls vorgestellt werden, sie finden sich in der Einleitung des die beiden Artikel enthaltenden Buches.

13. **Norm-Quadriken und Galoiskohomologie.** In diesem Abschnitt geht es vornehmlich um das Studium des *Rost-Motivs*: Ein beliebiges Element a einer Milnor-K-Gruppe gibt Anlaß zu einer *Normquadrik*

über k, und letztere läßt sich in der Kategorie der Motive zerlegen: Es gibt einen kanonischen ‚interessanten' Summanden M_a, dies ist Aussage von Theorem 4.3 aus [8] (Proposition 4.1 muß nicht notwendigerweise bewiesen werden). Wichtig ist für uns das ausgezeichnete Dreieck aus Theorem 4.4. Weiterer Höhepunkt ist Theorem 4.9. Aus Abschnitt 5 benötigen wir lediglich Theorem 5.9, für welches auch eine Abkürzung gibt (vgl. Bemerkung auf Seite 17 in [6]). Alles in Allem Seiten 77-88 in [8].

14. **Lichtenbaum-Kohomologie und die Milnor Vermutung.** Hier geht es um die Abschnitte 6 und 7 aus [8]. Zunächst wird die Lichtenbaum-Kohomologie eingeführt und in Theorem 6.1 mit der étalen Kohomologie verglichen. Die ‚Hilbert-90'-Eigenschaft ‚H90(w, l)' ist eine Verschwindungseigenschaft für die Lichtenbaum-Kohomologie, und sie impliziert das (Quasi-)Verschwinden gewisser effektiver motivischer Komplexe in Theorem 6.6, welches als wichtigstes Korollar das Corollary 6.10 hat, welches besagt daß H90(w, l) impliziert, daß die Normrestabbildung der Milnor- bzw. Bloch-Kato-Vermutung ein Isomorphismus in den Graden $\leq w$ ist. Lemmata 6.12 und 6.13 sind wesentlich für den Induktionsschritt im Beweis des Theorems 7.14, welches besagt, daß H90($w, 2$) gilt, und damit den Beweis der Milnor-Vermutung abschließt.

Literatur

[1] B. I. Dundas, M. Levine, P. A. Ostvaer, O. Röndings, and V. Voevodsky. *Motivic Homotopy Theory.* Universitext. Springer, 2007.

[2] H. Freudenthal. über die klassen der sphärenabbildungen. i. große dimensionen. *Compositio Mathematica* **5**, page 299314, 1938.

[3] E. M. Friedlander and V. Voevodsky. Bivariant cycle cohomology. *Cycles, transfers, and motivic homology theories, Annals of Math. Studies* **143**, pages 138–187, 2000.

[4] F. Morel and V. Voevodsky. $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes. *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* **90**, pages 45–143, 1999.

[5] A. Vistoli. Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory. *B. Fantechi, L. Gottsche, L. Illusie, S. Kleiman, N. Nitsure, A. Vistoli, Fundamental Algebraic Geometry: Grothendiecks FGA explained, Mathematical Surveys and Monographs* **123** *(2006)*, pages 1–104, 2006.

[6] V. Voevodsky. The Milnor conjecture. *Preprint*, pages 1–51, 1996.

[7] V. Voevodsky. Triangulated categories of motives over a field. *Cycles, transfers, and motivic homology theories, Annals of Math. Studies* **143**, pages 188–238, 2000.

[8] V. Voevodsky. Motivic cohomology with $\mathbb{Z}/2$-coefficients. *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* **98**, pages 59–104, 2003.

[9] V. Voevodsky. Reduced power operations in motivic cohomology. *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* **98**, pages 1–57, 2003.