

Arbeitsgemeinschaft

# Ergodentheorie und ausgewählte Anwendungen

**Vortrag 1** (*Sven Caspart*)

**14. 4. 2014**

## Wiederkehr- und Ergodensätze

Der erste Vortrag soll uns die Objekte der AG vorstellen: dynamische Systeme und deren erste Eigenschaften. Insbesondere wollen wir Ergodizität und Rekurrenz definieren und Beispiele sowie Gegenbeispiele kennenlernen, die wir im Verlauf der AG immer wieder heranziehen können. Außerdem soll es drei Ergodensätze (ohne Beweis) geben. Grundlage ist [EW11, Kapitel 2.1 bis 2.6 und Kapitel 2.9], zur Ergänzung kann [HK02] herangezogen werden.

AG fällt aus wegen Ostermontag.

**21. 4. 2014**

**Vortrag 2** (*Benjamin Peters*)

**28. 4. 2014**

## Mischende Systeme und eindeutig ergodische Maße

Wir wollen zunächst noch weitere Vokabeln lernen und diese an Beispielen ausprobieren. Genauer sind das die Eigenschaft eines Systems, mischend zu sein, aus [EW11, Kapitel 2.7 und 2.8] und eindeutige Ergodizität aus [EW11, Kapitel 4.1 bis 4.3]. Dafür benötigen wir noch die Existenz von invarianten Maßen.

**Vortrag 3** (*Daniel Haase*)

**5. 5. 2014**

## Gleichverteilung, Konditionalmaße und ergodische Zerlegung

Die Schwierigkeit dieses Vortrags besteht darin, viel Verschiedenes unter einen Hut zu bringen. Zunächst wollen wir aus [EW11, Kapitel 4.4] lernen, wie dynamische Systeme eingesetzt werden können, um Gleichverteilung in verschiedenen Kontexten zu zeigen. Dann wollen wir einen kurzen Ausflug in die reine Maßtheorie machen und aus [EW11, Kapitel 5] etwas über Konditionalmaße lernen.

Je nach Lust und Zeit können wir uns dann noch damit beschäftigen, wie eigentlich die Kategorie der maßerhaltenden Systeme aussieht. Obligatorisch ist hier nur [EW11, Kapitel 6.1], in dem die Existenz der ergodischen Zerlegung aus dem letzten Vortrag gezeigt wird.

Vortrag 4 (*Florian Nisbach*)

12. 5. 2014

### Gruppenaktionen als maßerhaltende Transformationen

Wir erweitern nun unseren Horizont und ersetzen die bisherigen dynamischen Systeme, die durch  $\mathbb{Z}$ -Aktionen beschrieben werden können, durch Aktionen allgemeinerer Gruppen. Das machen wir zuerst durch Wiederholung und Übertragung einiger Konzepte aus dem ersten und zweiten Vortrag und durch die Betrachtung eines Beispiels (Three Dots Example oder  $\times 2$ ,  $\times 3$  System).

Der Fokus sollte dann aber auf der Existenz und den Eigenschaften des Haarmaßes liegen, das wir im weiteren Verlauf noch brauchen werden. Das findet sich vor allem in [EW11, Kapitel 8.1 bis 8.3].

Vielleicht bleibt dann noch etwas Zeit für einen Überblick über [EW11, Kapitel 8.4 bis 8.8]. Darin geht es vor allem um mittelbare Gruppen, für die noch weitere Eigenschaften aus den ersten Vorträgen übertragen werden können. Im weiteren Verlauf werden diese Gruppen allerdings nicht mehr auftreten.

Vortrag 5 (*David Weniger*)

19. 5. 2014

### Geodätischer und horozyklischer Fluss

Der Vortrag sollte zunächst kurz klarstellen, wie wir die hyperbolische Ebene und ihre Metrik auffassen wollen. Ausführlicher wollen wir dann den geodätischen und den horozyklischen Fluss anschauen.

Der Vortrag soll [EW11, Kapitel 9] abdecken, die Schwerpunkte können aber individuell gesetzt werden. Der Beweis von Theorem 9.21 sollte höchstens angerissen werden, da wir im nächsten Vortrag noch einen Beweis sehen werden.

Vortrag 6 (*Tobias Columbus*)

26. 5. 2014

### Mautner-Phänomen und der Satz von Howe und Moore

In seiner einfachsten Form besagt das Lemma von Mautner, dass in einer unitären Darstellung einer lokalkompakten Gruppe  $G$  jeder Fixpunkt eines Elements  $g$  auch fix unter der Aktion eines jeden Elements  $h$  mit  $\lim g^n h g^{-n} = 1$  ist. Verallgemeinerungen dieses Prinzips erlauben es uns zum Beispiel einzusehen, dass eine ergodische Aktion von  $SL_2(\mathbf{R})$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(X, \mu)$  bereits ergodische Aktionen aller Elemente  $g \in SL_2(\mathbf{R})$ , welche nicht konjugiert zu einem Element aus  $SO(2)$  sind, induziert.

Das Hauptergebnis dieses Vortrags ist der Satz von Howe und Moore, welcher besagt, dass bestimmte unitäre Darstellungen einer halbeinfachen Lie-Gruppe bei  $\infty$  verschwindende Matrix-Koeffizienten haben. Diese Aussage lässt sich als Aussage über bestimmte dynamische Systeme interpretieren und auch so beweisen.

Literatur für diesen Vortrag ist [EW11, Kapitel 11.1 bis 11.4] und zur Unterstützung [BM00].

**Vortrag 7** (*Felix Wellen*)

**2. 6. 2014**

### **Orbits des horozyklischen Flusses**

In diesem Vortrag wollen wir verstehen, wie unterschiedlich sich der horozyklische Fluss und der geodätische Fluss auf Quotienten von  $SL_2(\mathbb{R})$  verhält. Trotzdem hilft der Zusammenhang zwischen den beiden Flüssen, neue Erkenntnisse zu gewinnen.

Nachdem wir im fünften Vortrag Eigenschaften des geodätischen Flusses kennengelernt haben, werden wir uns hier vor allem den invarianten Maßen bezüglich des horozyklischen Flusses und den guten Eigenschaften der Orbits aus [EW11, Kapitel 11.5 bis 11.7] widmen.

AG fällt aus wegen Pfingstmontag.

**9. 6. 2014**

**Vortrag 8** (*Björn Mützelt*)

**16. 6. 2014**

### **Teichmüllerfluss und Kontsevich-Zorich-Kozykel I**

Wir wollen nun die Ergodentheorie auf Translationsflächen und deren Modulräume anwenden. Dazu benötigen wir zunächst einige Grundbegriffe aus dieser Welt, insbesondere den Teichmüllerfluss und dessen Ableitung, den Kontsevich-Zorich-Kozykel. Als Grundlage dient [FM13, Kapitel 1 bis 3].

Dieser Termin ist als Puffer für überzogene Vorträge gedacht.

**23. 6. 2014**

**Vortrag 9** (*Gabriela Weitze-Schmithüsen*)

**30. 6. 2014**

### **Teichmüllerfluss und Kontsevich-Zorich-Kozykel II**

Hier sollen die Objekte aus dem letzten Vortrag wieder aufgegriffen werden und ein paar der Theoreme aus [FM13, Kapitel 4 und 5] vorgestellt werden. Insbesondere wollen wir das Konzept der Renormalisierung kennenlernen, das ausführlich auch in [Yoc10] behandelt wird.

Dieser Termin ist als Puffer für überzogene Vorträge gedacht.

**7. 7. 2014**

**Vortrag 10** (*Fabian Januszewski*)

**14. 7. 2014**

### **Shannons Hauptsatz der Informationstheorie**

In der Informationstheorie untersucht man die Übertragung von Informationen von einem Sender zu einem Empfänger über eventuell gestörte Kanäle. Den Sender von Nachrichten kann man zum Beispiel mit Hilfe von Markov-Ketten modellieren. In diesem Fall gibt der Sender Anlass zu einem dynamischen System, welches sich unter natürlichen Voraussetzungen als ergodisch herausstellt. Das Hauptergebnis dieses Vortrags ist der sogenannte Hauptsatz der Informationstheorie, welcher unter der Annahme der Ergodizität und der starken Mischung des erwähnten dynamischen Systems die Existenz einer „optimalen“ Kodierung für ein gegebenes Szenario aus Sender, Empfänger und Kanal sicherstellt.

Für die geschilderte Situation werden wir das Konzept der Entropie einführen, mit dem in diesem Kontext der Informationsgehalt einer Nachricht gemessen werden kann. Grundlage für diesen Vortrag ist [SW49].

**Vortrag 11** (*Stefan Kühnlein*)

**21. 7. 2014**

### **Ausblick: Ratner-Theorie**

In diesem Vortrag wollen wir die Sätze von Marina Ratner kennenlernen, die der sogenannten Ratner-Theorie zugrundeliegen.

**Oppenheim-Vermutung**

Zum Abschluss wird es nochmal um die Anwendung der dynamischen Methoden in der Zahlentheorie gehen. Es soll etwas Kontext zur Oppenheim-Vermutung gegeben werden und dann gezeigt werden, wie diese mit Ratner-Theorie bewiesen werden kann.

**Literatur**

- [BM00] M. Bachir Bekka und Matthias Mayer. *Ergodic theory and topological dynamics of group actions on homogeneous spaces*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000, S. x + 200. ISBN: 0-521-66030-0/pbk.
- [EW11] Manfred Einsiedler und Thomas Ward. *Ergodic theory. With a view towards number theory*. London: Springer, 2011, S. xvii + 481. ISBN: 978-0-85729-020-5/hbk; 978-0-85729-021-2/ebook.
- [FM13] Giovanni Forni und Carlos Matheus. “Introduction to Teichmüller theory and its applications to dynamics of interval exchange transformations, flows on surfaces and billiards”. In: *preprint* (2013). URL: <http://arxiv.org/abs/1311.2758>.
- [HK02] Boris Hasselblatt und Anatole Katok. “Principal structures.” In: *Handbook of dynamical systems. Volume 1A*. Amsterdam: North-Holland, 2002, S. 1–203. ISBN: 0-444-82669-6/hbk.
- [SW49] Claude Elwood Shannon und Warren Weaver, Hrsg. *The mathematical theory of communication*. Urbana: Univ. of Ill. Press, 1949.
- [Yoc10] Jean-Christophe Yoccoz. “Interval exchange maps and translation surfaces.” English. In: *Homogeneous flows, moduli spaces and arithmetic. Proceedings of the Clay Mathematics Institute summer school, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Pisa, Italy, June 11–July 6, 2007*. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); Cambridge, MA: Clay Mathematics Institute, 2010, S. 1–69. ISBN: 978-0-8218-4742-8/pbk.