AG Algebraische Geometrie/Algebraische Zahlentheorie
Wintersemester 2009/2010

Train Tracks

Ute Wolf, André Kappes

Vortrag 1: *Abbildungsklassengruppe und Teichmüllerraum (Ute Wolf)* [FM, S. 51-53, S. 221-223] [Th, S. 421-427] [P, S.84-85]

In diesem einführenden Vortrag wird die Abbildungsklassengruppe $\mathrm{Mod}(S)$ vorgestellt. Sie operiert auf dem Teichmüllerraum $\mathcal{T}(S)$ und dessen Thurston-Kompaktifizierung. Ein erstes wichtiges Ergebnis ist die Thurston-Klassifikation von Abbildungsklassen. Hiermit eng verknüpft sind die Begriffe Blätterung und (geodätische) Laminierung (mit Maß), welche hier vorgestellt werden sollen. Der Vortrag soll eine Übersicht darstellen, es wird nicht möglich sein, alles zu beweisen.

Vortrag 2: *Train Tracks auf Flächen (Florian Nisbach)* [P]

Ein Train Track τ ist ein endlicher, glatt in eine Fläche eingebetteter Graph mit einigen technischen Zusatzeigenschaften. Eine Gewichtung auf τ ist gegeben durch die Zuordnung einer nichtnegativen reellen Zahl zu jeder Kante von τ derart, dass die Switch-Bedingung erfüllt ist. Sind die zugeordneten Werte ganzzahlig, so induziert der gewichtete Train Track eine Multikurve auf S, ansonsten in jedem Fall eine Laminierung auf S. Mit der Hilfe von Train Tracks und der zugehörigen Laminierungen ist es möglich, Abbildungsklassen als Pseudo-Anosov zu erkennen und somit einen neuen Beweis der Thurston-Klassifikation zu liefern.

Vortrag 3: *Uniform Convergence Lemma (Thomas Willging)* [M, S. 591-600]

Dieses Lemma besagt, dass es zu jeder Abbildungsklasse $f \in \mathrm{Mod}(S)$ eine Quelle $J_-(f)$ und eine Senke $J_+(f)$ von projektiven Laminierungen gibt, d.h. für geeignete Umgebungen U_+ von $J_+(f)$ und U_- von $J_-(f)$ gilt $f^n(\mathcal{PL}(S) \setminus U_-) \subseteq U_+$ für hinreichend großes n. Dieses Lemma soll gezeigt werden für Abbildungsklassen von algebraisch endlichem Typ und evtl. für Pseudo-Anosov-Abbildungsklassen. Falls noch Zeit ist, bietet sich eine Beschreibung des allgemeinen Falls an.

Vortrag 4: *Die Tits-Alternative für* $\mathrm{Mod}(S)$ *(Hannes Riesterer)* [M, S. 583-584, 608-611]

Die Tits-Alternative besagt, dass jede Untergruppe von $\mathrm{Mod}(S)$ entweder virtuell abelsch ist oder eine nichtabelsche freie Gruppe enthält. Sie soll in diesem Vortrag bewiesen werden. Für Untergruppen, die von zwei Elementen erzeugt werden, gilt sogar eine stärkere Aussage.

Vortrag 5: *Outer Space (Emanuel Taube)* [V1, S. 1-8]

Der Culler-Vogtmann-Raum CV_n wird eingeführt und die Aktion von $\mathrm{Out}(F_n)$ darauf definiert. Es werden Parallelen zur Abbildungsklassengruppe und deren Aktion auf dem Teichmüllerraum aufgezeigt. (Die Abbildungsklassengruppe ist eine Untergruppe von $\mathrm{Out}(F_n)$.) Es gibt einen Deformationsretrakt K_n von CV_n (i.a. von kleinerer Dimension), der ein Simplizialkomplex ist. Mit der Hilfe von K_n werden wir später Aussagen über die virtuelle kohomologische Dimension von $\mathrm{Out}(F_n)$ treffen können.

Vortrag 6: *(virtuelle) kohomologische Dimension (Fabian Januszewski)* [V2, S. 17-22]
Nachdem die Begriffe der kohomologischen Dimension und der virtuellen kohomologischen Dimension einer Gruppe erklärt sind, soll mit der Hilfe des Raumes K_n aus Vortrag 5 die virtuelle kohomologische Dimension von $\mathrm{Out}(F_n)$ bestimmt werden.

Vortrag 7: $\mathbb{R}$*-Bäume und die Komplettierung von Outer Space (Jingwei Zhao)* [CM]
Der Raum CV_n kann in größere Räume eingebettet werden: als markierte Graphen in einen unendlichdimensionalen reellen projektiven Raum $\mathbb{P}$ oder als F_n-Aktionen auf Bäumen in den Raum der $\mathbb{R}$-Bäume (und somit auch wieder in $\mathbb{P}$). Diese beiden Darstellungen sollen miteinander verglichen und ihr Abschluss im größeren Raum näher untersucht werden.

Vortrag 8: *Train Tracks für* $\mathrm{Out}(F_n)$ *(Jochen Schröder)* [BH, S. 4–18]
In diesem Vortrag soll noch einmal, aufgegriffen werden, was wir in Jochens Vortrag so oder in knapperer Form schon gehört haben. Am Anfang steht die Definition von Train Tracks für äußere Automorphismen von F_n (gern mit Beispiel) und der Defintion von irreduziblen äußeren Automorphismen. Der Satz von Perron-Frobenius sollte noch einmal kurz wiederholt werden. Anschließend sollte der Beweis von Theorem 1.7 [BH], wenn nicht vollständig ausgeführt, so doch ausreichend detailliert skizziert werden. Als Vorlage kann für Teile alternativ auch auf [Lo, Abschnitt 2] zurückgegriffen werden. Einige Sachen, die das Verständnis erleichtern, findet man in [St2] (insbesondere die Definition der “Faltung”).

Vortrag 9: *Geometrische äußere Automorphismen (Stefan Kühnlein)* [BH, S. 29–32]
Grundlage des Vortrags ist Abschnitt 4 in [BH]. Hier wird ein Kriterium angegeben, wann ein äußerer Automorphismus in $\mathrm{Out}(F_n)$ von einer Pseudo-Anosov-Abbildungsklasse einer Fläche herkommt (geometrisch ist). Für den Beweis wird an einigen Stellen auf Lemmata aus Jochens Vortrag zurückgegriffen, die an der Stelle wiederholt werden sollten. Außerdem sollte auch die Gegenrichtung, also wann ein Pseudo-Anosov einen irreduziblen äußeren Automorphismus induziert (und wann nicht) behandelt werden (siehe [BH, Example 1.4]).

Vortrag 10: *Irreduzibilitätskriterien und nichtgeometrische äußere Automorphismen (Gabi Schmithüsen)* [GS], [St1]
Nichtgeometrische äußere Automorphismen von F_n, also solche, die nicht von Abbildungsklassen herkommen, erhält man zum Beispiel, wenn die zugehörige Matrix in $\mathrm{GL}_n\mathbb{Z}$ eine PV-Matrix ist (von Pisot-Vijayaraghavan). Wieso das so ist, soll in diesem Vortrag geklärt werden [St1]. Andererseits sind solche Automorphismen irreduzibel. Das dazu gehörige Kriterium soll ebenfalls behandelt werden [GS].

Vortrag 11: *Bounded Cancellation (Diego De Filippi)* [Co], [BFH1, Lemma 3.1], [CHL]
In diesem Vortrag wird das Bounded Cancellation-Lemma bewiesen, das immer wieder in Argumenten auftauchen wird. Dazu wird zunächst die freie Gruppe $F = F(X)$ via der Wortmetrik $|\cdot|_X$ (bzw. der Metrik auf ihrem Cayley-Graphen $\Gamma(F, X)$) zu einem

metrischen Raum gemacht. Diese hat eine Kompaktifizierung durch ihren Gromov-Rand ([Co] und [CHL, Abschnitt 2, Abschnitt 6]). Sei nun $F(X) \ni w = \alpha\beta$ mit $|\alpha\beta|_X = |\alpha|_X + |\beta|_X$ und $f \in \mathrm{Aut}(F_n)$. Dann ist $|f(\alpha)|_X + |f(\beta)|_X$ nicht notwendig gleich $|f(\alpha\beta)|_X$, aber die Anzahl der auftretenden Auslöschungen ist durch eine Konstante unabhängig von α, β beschränkt. Diese Aussage kann man noch verstärken ([BFH1, Lemma 3.1]), was auch gezeigt werden sollte. Hilfreiche Erläuterungen zum BC-Lemma findet man auch in [CHL, Abschnitt 7].

Der Vortrag kann durch den Beweis, dass Fixgruppen von Automorphismen von F_n immer endlich erzeugt sind (ein erster Hinweis zur Scott-Vermutung), abgerundet werden (siehe [Co]).

Vortrag 12: *Relative Train Tracks und die Scott-Vermutung (Petra Forster)* [BH, S. 32–50]

In diesem Vortrag wollen wir lernen, dass man zu einem beliebigen äußeren Automorphismus in $\mathrm{Out}(F_n)$ einen relativen Train Track konstruieren kann. Der Algorithmus ([BH, Theorem 5.12 und Lemmata]) ist eine Verkomplizierung des in Vortrag 6 behandelten und muss nicht erklärt werden. Schön wäre (stattdessen) ein nichttriviales Beispiel eines relativen Train Tracks (evtl. [BH, Example 5.7, Example 5.16]). Anschließend soll der Beweis der Scott-Vermutung [BH, Abschnitt 6] skizziert werden.

Vortrag 13: *Laminierungen für äußere iwip-Automorphismen (Myriam Finster)* [BFH1, S. 220–225]

Ein iwip-Automorphismus (irreducible with irreducible powers) in $\mathrm{Out}(F_n)$ ist ein Automorphismus, dessen gesamte nichttriviale Potenzen irreduzibel sind. Ist dieser durch einen Train Track $f : G \to G$ realisiert, so kann man zu ihm eine isometrische Immersion $\ell : \mathbb{R} \to G$ assoziieren. Die Äquivalenzklasse von ℓ (unter einer geeigneten Relation) ist die f zugeordnete stabile Laminierung $\Lambda^+_f(G)$. Nach dieser Definition soll im Vortrag weiter gezeigt werden, dass man auch einem iwip-Automorphismus ϕ eine Laminierung Λ^+_ϕ zuordnen kann [BFH1, Abschnitt 1]. Anschließend wird begonnen, die Aktion von $\mathrm{Out}(F_n)$ auf der Menge der stabilen Laminierungen zu untersuchen [BFH1, Abschnitt 2 bis Example 2.5].

N.B.: Beachte das Erratum! [BFH2]

Vortrag 14: $\mathrm{Stab}(\Lambda^+_\phi)$ *ist virtuell zyklisch (Claus-Günther Schmidt)* [BFH1, S. 225–231]

Die aus dem vorigen Vortrag begonnene Untersuchung der Aktion von $\mathrm{Out}(F_n)$ auf der Menge der Laminierungen wird in der Untersuchung von $\mathrm{Stab}(\Lambda)$ für eine Laminierung Λ fortgeführt. Insbesondere wird ein Gruppenhomomorphismus $\sigma : \mathrm{Stab}(\Lambda) \to \mathbb{R}^+$ eingeführt, mit dessen Hilfe gezeigt wird, dass $\mathrm{Stab}(\Lambda)$ virtuell zyklisch ist. Dazu unterscheidet man, ob ein relativer Train Track ein exponentiell wachsendes Stratum hat oder nicht, und zeigt zuerst für reduzible und dann für alle Elemente in $\mathrm{Stab}(\Lambda)$, die ein Stratum mit exponentiellem Wachstum haben, dass das σ-Bild diskret in $\mathbb{R}^+$ ist. Die Train Tracks ohne exponentiell wachsendes Stratum sind von endlicher Ordnung und Torsionsuntergruppen von $\mathrm{Out}(F_n)$ sind endlich.

Vortrag 15: *Laminierungen, $\mathbb{R}$-Bäume und eine Tits-Alternative (Frank Herrlich)* [BFH1, S. 231–235]

Hier wird gezeigt, wie man jeder stabilen Laminierung einen Punkt im Abschluss des Outer Space, bzw. einen $\mathbb{R}$-Baum in äquivarianter Weise zuordnet. Aus der Aktion von $\mathrm{Out}(F_n)$ auf den Laminierungen, bzw. $\mathbb{R}$-Bäumen kann man den zweiten Baustein für die Tits-Alternative gewinnen: wenn zwei iwip-Automorphismen keine Potenzen gemein haben, dann gibt es Potenzen der beiden, die eine freie Gruppe erzeugen. Für den Beweis wird das Ping-Pong-Lemma benötigt [Ti]. Mit dieser Tatsache und dem aus dem letzten Vortrag bewiesenen Satz über die Struktur von $\mathrm{Stab}(\Lambda)$ folgt die Tits-Alternative für eine Untergruppe H von $\mathrm{Out}(F_n)$, die ein iwip-Element ϕ enthält. (N.B.: beachte Erratum! [BFH2])

Literatur

[BFH1] M. Bestvina, M. Feighn, M. Handel, *Laminations, Trees and Irreducible Automorphisms of Free Groups*, Geom. funct. anal., Vol. 7, No. 2 (1997)

[BFH2] M. Bestvina, M. Feighn, M. Handel, *Erratum to Laminations, Trees and Irreducible Automorphisms of Free Groups*, Geom. funct. anal., Vol. 7, No. 6 (1997)

[BH] M. Bestvina, M. Handel, *Train tracks and automorphisms of free groups*, Ann. of Math., Vol. 135, No. 1 (1992)

[CHL] T. Coulbois, A. Hilion, M. Lustig, *$\mathbb{R}$-trees and Laminations for Free Groups I: Algebraic Laminations*, J. London Math. Soc., (2) 78 (2008)

[CM] M. Culler, J. W. Morgan, *Group actions on $\mathbb{R}$-trees*, Proc. London Math. Soc., (3) 55 (1987)

[Co] D. Cooper, *Automorphisms of Free Groups Have Finitely Generated Fixed Point Sets*, Journ. of Algebra, 111 (1987), 453-456

[FM] B. Farb, D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, version 3.0, Juni 2009, `http://www.math.uchicago.edu/~margalit/mcg/mcgv31.pdf`

[GS] S. M. Gersten, J. R. Stallings, *Irreducible Outer Automorphisms of a Free Group*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 111, No. 2 (1991)

[LL] G. Levitt, M. Lustig, *Irreducible automorphisms of F_n have North-South Dynamics on Compactified Outer Space*, J. Inst. Math. Jussieu, Vol. 2, No. 1 (2003)

[Lo] J. Los, *On the Conjugacy Problem for Automorphisms of Free Groups*, Topology, Vol. 35, No. 3 (1996)

[M] J. McCarthy, *A "Tits-alternative" for subgroups of surface mapping class groups*, Trans. AMS 291 (1985), 583-612

[P] R. Penner, *An Introduction to Train Tracks*, in: Low-dimensional Topology and Kleinian Groups (edited by D. Epstein), Warwick 1984

[St1] J. R. Stallings, *Unrealizable Automorphisms of Free Groups*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 84, No. 1 (1982)

[St2] J. R. Stallings, *The Topology of Finite Graphs*, Invent. math. 71, (1983)

[Th] W. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. AMS 19(2), 1988, S. 417-431

[Ti] J. Tits, *Free Subgroups in Linear Groups*, J. Algebra, 20 (1972)

[V1] K. Vogtmann, *Automorphisms of Free Groups and Outer Space*, Geometriae Dedicata 94, 2002, S. 1-31

[V2] K. Vogtmann, *Actions of the group of outer automorphisms of a free group*, Conference on Geometry and the Imagination (in honor of William P. Thurston), 2007 `http://www.math.princeton.edu/Thurston60th/Papers/Vogtmann.pdf`