Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Stefan Kühnlein
Fabian Januszewski

21.04.2009

# Algebra II - Übungsblatt 1

### Aufgabe 1

Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Es sei $\operatorname{Ob}\mathcal{C}^0 := \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und

$$\forall A, B \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}^0 : \quad \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}^0}(A, B) := \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A).$$

Zeigen Sie, daß hierdurch eine Kategorie $\mathcal{C}^0$ definiert wird (diese wird die *opposite Kategorie zu* $\mathcal{C}$ genannt), mit der Eigenschaft $\left(\mathcal{C}^0\right)^0 = \mathcal{C}$.

### Aufgabe 2

Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Wir definieren $\operatorname{Ob}\mathcal{D}$ als Klasse der Tripel $(A, B, f)$, wobei $A$ und $B$ beliebige Objekte aus $\mathcal{C}$ sind und $f : A \to B$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Für $X = (A, B, f), Y = (A', B', g) \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ sei

$$\operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(X, Y) := \{(\alpha, \beta) \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A') \times \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(B, B') \mid \beta \circ f = g \circ \alpha\}.$$

Zeigen Sie, daß auf diese Weise eine Kategorie $\mathcal{D}$ definiert ist.
*Hinweis:* Die Objekte aus $\mathcal{D}$ lassen sich interpretieren als Morphismen $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$ ($A, B$ sind in der Definition redundant — weshalb?) und $\operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ ist die Menge der kommutativen Diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"'] \\ A' \arrow[r, "g"] & B' \end{tikzcd}$$

### Aufgabe 3

Es sei $(E, V)$ ein gerichteter Graph. Das bedeutet, daß $E$ die Menge der *Ecken* ist und $V \subseteq E \times E$ die Menge der *gerichteten Kanten*.

(a) Zeigen Sie, daß zu $V$ eine eindeutig bestimmte transitive reflexive Relation $R \supset V$ auf $E$ existiert mit der Eigenschaft, daß für jede weitere transitive reflexive Relation $S \supset V$ auf $E$:
$$\forall e_1, e_2 \in E : \quad e_1 R e_2 \implies e_1 S e_2.$$

(b) Zeigen Sie, daß wir zu $(E, V)$ eine (kleine) Kategorie $\mathcal{E}$ erhalten, indem wir als Objekte die Ecken aus $E$ definieren, und als Morphismenmengen für $e_1, e_2 \in E$:
$$\operatorname{Mor}_{\mathcal{E}}(e_1, e_2) := \{r \in R \mid r = (e_1, e_2)\}.$$

(c) Es sei $E := \mathbb{N}_0$ und $V := \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}_0,\ m \text{ teilt } n\}$. Dann gilt $V = R$ und geben Sie in der entsprechenden Kategorie $\mathcal{E}$ folgende Morphismenmengen an:
$$\forall n \in E : \quad \operatorname{Mor}_{\mathcal{E}}(1, n),\ \operatorname{Mor}_{\mathcal{E}}(n, 1),\ \operatorname{Mor}_{\mathcal{E}}(0, n),\ \operatorname{Mor}_{\mathcal{E}}(n, 0).$$

(d) Wie lassen sich im Fall von (c) Primzahlen als Objekte von $\mathcal{E}$ charakterisieren?

**Abgabe** bis spätestens Dienstag, den 28. April 2009, um 15:30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.