Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Stefan Kühnlein
Fabian Januszewski

28.04.2009

Algebra II - Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Es sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein kovarianter Funktor beliebiger Kategorien. Zeigen Sie, daß F Isomorphismen in Isomorphismen abbildet, Monomorphismen jedoch nicht notwendigerweise in Monomorphismen. Was gilt für Epimorphismen?

Aufgabe 2

Es sei $G = (E, V)$ ein gerichteter Graph. Wie in Aufgabe 3 von Blatt 1 bezeichnen wir mit $\mathcal{E}$ die G entsprechende Kategorie. Sei weiterhin $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Ein *kommutatives Diagramm* ist ein Funktor $D : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$.

(a) Zeigen Sie, daß wir für einen festen Graphen G eine Kategorie $\mathcal{D}(G, \mathcal{C})$ der *kommutativen Diagramme* in $\mathcal{C}$ erhalten, indem wir kommutative Diagramme als Objekte deklarieren und natürliche Transformationen als Morphismen wählen.

(b) Geben Sie einen Graphen G an, welcher die in Aufgabe 2 von Blatt 1 beschriebene Situation beschreibt und zu einer Kategorie $\mathcal{D}(G, \mathcal{C})$ Anlaß gibt, welche zur dortigen Kategorie $\mathcal{D}$ isomorph ist.

Aufgabe 3

Es sei k ein beliebiger Körper und es bezeichne $\mathcal{V}$ die Kategorie der endlichdimensionalen Vektorräume über k. Zeigen Sie, daß $\mathcal{V}$ äquivalent ist zu folgender Kategorie $\mathcal{M}$: die Objekte sind natürliche Zahlen $n \geq 0$ und die Morphismenmenge zweier Objekte $m, n \geq 0$ ist gegeben durch die Menge $k^{m \times n}$ der $m \times n$-Matrizen.

Aufgabe 4

Es sei R ein Hauptidealring und M ein freier R-Modul von endlichem Rang n. Geben Sie analog zu Aufgabe 3 eine möglichst „kleine“ Kategorie $\mathcal{E}$ an, welche zur Kategorie $\mathcal{U}$ der Untermoduln von M äquivalent ist, wobei wir in $\mathcal{U}$ Morphismen wie folgt definieren: Sind U, U' Untermoduln von M, so sei $\mathrm{Mor}(U, U')$ die Menge der R-linearen Abbildungen $\phi : U \to U'$, welche von einem R-linearen *Automorphimus* $\psi : M \to M$ induziert werden, d.h. für welche $i' \circ \phi = \psi \circ i$ gilt, wobei $i : U \to M$ und $i' : U' \to M$ die kanonischen Inklusionen bezeichnet.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 5. Mai 2009, um 15:30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.