Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Stefan Kühnlein
Fabian Januszewski

05.05.2009

Algebra II - Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es bezeichne <u>*Ring*</u> die Kategorie der kommutativen Ringe (mit 1) und <u>*Gruppen*</u> die Kategorie der Gruppen. Dann ist für jedes $n \geq 0$ durch

$$\mathrm{GL}_n: \ R \mapsto \mathrm{GL}_n(R) := \mathrm{Aut}(R^n)$$

ein Funktor <u>*Ring*</u> $\to$ <u>*Gruppen*</u> gegeben. Präzisieren Sie dies und zeigen Sie weiterhin, daß die Determinante als natürliche Transformation $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_1$ aufgefaßt werden kann.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und <u>*Men*</u> die Kategorie der Mengen. Wir definieren eine Kategorie $\mathcal{G}$ wie folgt:

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{G} = \{\heartsuit\}, \quad \mathrm{Mor}_{\mathcal{G}}(\heartsuit, \heartsuit) = G,$$

wobei die Verknüpfungen der Morphismen aus der Gruppenstruktur übernommen werden.

(a) Zeigen Sie, daß ein Funktor von $\mathcal{G}$ nach <u>*Men*</u> nichts anderes ist als die Wahl einer Menge M und einer Gruppenoperation von G auf M.

(b) Was sind die natürlichen Transformationen zwischen zwei derartigen Funktoren?

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Es sei L/K eine endliche galoissche Körpererweiterung mit Galoisgruppe G. Es bezeichne $\mathcal{K}$ die opposite Kategorie der Kategorie der Zwischenkörper, wobei wir letztere mit K-Körperhomomorphismen versehen, welche auf K die Identität induzieren. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{K}$ ist äquivalent zur Kategorie $\mathcal{T}$ der transitiven G-Mengen.

(b) Es sei $E : \mathcal{K} \to \mathcal{T}$ ein Funktor, welcher zu obiger Äquivalenz Anlaß gibt. Durch Verkettung mit dem Vergißfunktor $\mathcal{T} \to$ <u>*Men*</u> erhalten wir einen Funktor $F : \mathcal{K} \to$ <u>*Men*</u>. Letzterer ist *darstellbar*, d.h. es existiert ein Objekt X aus $\mathcal{K}$ so daß F isomorph zum Funktor $Z \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(X, Z)$ ist.

(c) Machen wir aus jedem $\mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(X, Z)$ in natürlicher Weise eine G-Menge, so ist E isomorph zu $Z \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(X, Z)$, nun als Funktor $\mathcal{K} \to \mathcal{T}$.

(d) In der Kategorie der Funktoren $\mathcal{K} \to \mathcal{T}$ hat E eine Automorphismenmenge A, welche eine Gruppenstruktur trägt. Es gilt $A \cong G$. Analoges gilt für F (vgl. Aufgabe 2 (b)).

bitte wenden!

Zusatzaufgabe (4 Punkte)

Eine Gruppe von Zwergen stand im Operationssaal und operierte auf einer Menge. Draußen standen noch alle möglichen endlichen Mengen mit allen möglichen Operationswünschen herum.

Chefarzt Hampel wusch sich die Hände und ging zur Tür. „Der nächste bitte!" rief er; aber wer um alles in der Welt sollte der nächste sein? Bekümmert blickte er in den Warteraum, in dem ein Gewusel und Gemenge war, das seinesgleichen suchte. Er fühlte sich recht hilflos.

Da kam Oberschlau. Er war soeben von einem Verwaltungslehrgang zurückgekehrt und hatte nun seine erste Bewährungsprobe. Schon rief er die Patienten zu mehr Selbstbeteiligung auf; es sollte doch bitte aus jeder Isomorphieklasse von Operationswünschen nur ein Vertreter geschickt werden, und dieser solle – via fest gewählter Isomorphismen – seine Operation auf die anderen Mitglieder seiner Isomorphieklasse übertragen. Nachdem diesem kategorischen Imperativ seitens der Patienten unter einigem Gemurre genüge getan worden war, stellte sich zur allgemeinen Freude heraus, dass nicht nur viel weniger Wartende übrig waren, sondern dass sich überhaupt eine Warteschlange bilden konnte. (Wieder erleben wir den Einfluss der englischen Vorfahren Oberschlaus.)

Finde die Aufgabe und schreibe sie nebst Antwort, Rechnung und Kontrolle **sauber** *in Dein Heft. Versuche anschließend, Anja einen Punkt für Deinen Lösungsvorschlag abzuringen.*

Bemerkung: Eine Warteschlange ist hier eine abzählbare Menge mit einer Bijektion zu den natürlichen Zahlen (egal, ob mit oder ohne Null). Und eine Gruppe von Zwergen ist natürlich immer endlich erzeugt.

Es ist nicht mit letzter Sicherheit dokumentiert, welche Folgen die fest gewählten Isomorphismen bei den übrig gebliebenen Patienten zeitigten. Auch von Spontanheilungen wird berichtet. Diese sind aber wegen der unsicheren Quellenlage bei obiger Diskussion nicht zu berücksichtigen.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 12. Mai 2009, um 15:30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.