Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Stefan Kühnlein
Fabian Januszewski

12.05.2009

Algebra II - Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es bezeichne $\underline{kHg}$ die Kategorie der kommutativen Halbgruppen und $\underline{Ab}$ die Kategorie der abelschen Gruppen. Wir betrachten den Vergißfunktor

$$F : \underline{Ab} \to \underline{kHg}.$$

Zeigen Sie, daß F einen adjungierten Funktor besitzt und konstruieren Sie explizit die universellen Objekte.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es bezeichne $\underline{Ringe}$ die Kategorie der Ringe und es sei M eine feste abelsche Gruppe.

(a) Machen Sie die Zuordnung

$$R \mapsto \{\mu : R \times M \to M \mid M \text{ ist } R\text{-Modul vermöge } \mu\}$$

zu einem kontravarianten Funktor $F : \underline{Ringe} \to \underline{Mengen}$.

(b) Geben Sie ein darstellendes Objekt an.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und es bezeichne $\underline{Alg}_R$ die Kategorie der assoziativen unitären kommutativen R-Algebren.

(a) Zeigen Sie, daß $\underline{Alg}_R$ äquivalent ist zu einer geeigneten Unterkategorie einer der Kategorien aus Aufgabe 2 von Blatt 1.

(b) Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R. Ist A eine R-Algebra, so bezeichne $A\mathfrak{a}$ das Idealerzeugnis von $\mathfrak{a}$ in A. Präzisieren Sie, daß wir durch Quotientenbildung einen Funktor $F_{\mathfrak{a}} : \underline{Alg}_R \to \underline{Alg}_{R/\mathfrak{a}}$ erhalten. Zu welchem Funktor ist dieser adjungiert? Interpretieren Sie hierzu $A/A\mathfrak{a}$ in geeigneter Weise als universelles Objekt.

(c) Wenden Sie die Theorie der adjungierten Funktoren an, um die Existenz einer natürlichen Isomorphie

$$(R/\mathfrak{a})[X] \cong R[X]/(R[X]\mathfrak{a})$$

zu beweisen.

Hinweis: Überlegen Sie sich, daß die Komposition (rechts- oder) linksadjungierter Funktoren wieder (rechts- oder) linksadjungiert ist.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 19. Mai 2009, um 15:30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.