Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Stefan Kühnlein
Fabian Januszewski

19.05.2009

Algebra II - Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei K ein Körper. Zeigen Sie, daß es eine bis auf Isomorphie eindeutige vierdimensionale K-Algebra Q gibt mit einer Basis $\{1, i, j, k\}$, welche die Relationen

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

erfüllt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei A ein Ring, welcher eine direkte Summe $A \cong \bigoplus_{i \in I} L_i$ einfacher Linksideale L_i, $i \in I$ ist. Zeigen Sie, daß jeder einfache A-Modul M zu einem L_i isomorph ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Es sei R ein Ring und es bezeichne $\tilde{K}(R)$ die Menge der Isomorphieklassen endlich erzeugter R-Moduln. Zeigen Sie, daß $\tilde{K}(R)$ ein kommutatives Monoid ist, wenn wir als Verknüpfung die direkte Summe zweier Moduln wählen.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Es sei k ein Körper und A eine halbeinfache endlichdimensionale k-Algebra. Alle Moduln in dieser Aufgabe seien *endlich erzeugt*. Es sei $\tilde{K}(A)$ als wie zuvor. Das Bild eines A-Moduls M in $\tilde{K}(A)$ bezeichnen wir mit $\widetilde{M}$. Es bezeichne $(K(A), +)$ die abelsche Gruppe zu $\tilde{K}(A)$ im Sinne von Aufgabe 1 des letzten Übungsblattes. Das Bild von $\widetilde{M}$ in $K(A)$ bezeichnen wir mit $[M]$. Zeigen Sie:

(a) Wenn wir für einen Morphismus $f : A \to B$ halbeinfacher k-Algebren $K(f) := [M] \mapsto [f^*M]$ definieren, so wird K zu einem kontravarianten Funktor der Kategorie der halbeinfachen endlichdimensionalen k-Algebren in die Kategorie der abelschen Gruppen.

(b) Ist $\phi : M \to N$ ein Morphismus (endlich erzeugter) A-Moduln, so gilt

$$[\mathrm{Kern}\,\phi] + [\mathrm{Bild}\,\phi] = [M].$$

(c) $K(A)$ wird von den (Bildern unter $[\cdot]$ der) einfachen A-Moduln erzeugt.

(d) Die Menge E der Isomorphieklassen einfacher A-Moduln ist endlich.

(e) $K(A)$ ist eine freie abelsche Gruppe über E.

(f) $K(k)$ wird durch $[k]$ erzeugt und es gilt $K(k) \cong \mathbb{Z}$.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 26. Mai 2009, um 15:30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.