Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Stefan Kühnlein
Fabian Januszewski

26.05.2009

Algebra II - Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei R ein kommutativer noetherscher halbeinfacher Ring. Zeigen Sie, daß R ein endliches direktes Produkt von Körpern ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei R ein Hauptidealring und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in $R[X]$. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{m}$ von zwei Elementen erzeugt werden kann.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei R ein Ring und

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Zeigen Sie, daß B genau dann artinsch ist, wenn A und C artinsch sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{O}$ ein noetherscher Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Dann ist K ein $\mathcal{O}$-Modul. Wir nennen einen $\mathcal{O}$-Untermodul $\mathfrak{a} \neq 0$ von K ein *gebrochenes Ideal*, falls es ein von Null verschiedenes $d \in \mathcal{O}$ gibt mit $d\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}$. Zeigen Sie:

(a) Ein $\mathcal{O}$-Untermodul $\mathfrak{a} \neq 0$ von K ist genau dann ein gebrochenes Ideal, wenn $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt ist.

(b) Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebrochene Ideale, so ist

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} := \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{a}, b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{b}\}$$

ein gebrochenes Ideal.

(c) Die Menge $I(\mathcal{O})$ aller gebrochenen Ideale ist mit der Verknüpfung („Idealmultiplikation") aus (b) ein kommutatives Monoid.

(d) Ist $\mathcal{O}$ ein Hauptidealring, so ist $I(\mathcal{O})$ eine freie abelsche Gruppe über der Menge der Primideale von $\mathcal{O}$.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 2. Juni 2009, um 15:30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.