Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Stefan Kühnlein
Fabian Januszewski

02.06.2009

Algebra II - Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und es sei N ein R-Modul. Es bezeichne $\underline{Mod}_R$ die Kategorie der R-Moduln. Zeigen Sie:

(a) Der Funktor $\cdot \otimes_R N : \underline{Mod}_R \to \underline{Mod}_R$ ist rechtsexakt.

(b) Im Allgemeinen ist $\cdot \otimes_R N$ nicht exakt. (Gegenbeispiel!)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir übernehmen die Notation der Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) Tensorieren vertauscht mit direkten Summen. Genauer existiert für jede Familie N_i, $i \in I$, von R-Moduln ein Isomorphismus der beiden Funktoren

$$M \mapsto M \otimes_R \left(\bigoplus_{i \in I} N_i \right)$$

und

$$M \mapsto \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_R N_i)$$

(b) Der Funktor $\cdot \otimes_R N$ ist exakt, sofern N ein freier R-Modul ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $m, n \in \mathbb{Z}$ beliebig. Berechnen Sie den $\mathbb{Z}$-Modul

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie, daß L/K genau dann separabel ist, wenn es eine (algebraische) Körpererweiterung M/K gibt, so daß

$$L \otimes_K M \cong M^{[L:K]}$$

als K-Algebren. Dabei verstehen wir $M^{[L:K]}$ als K-Algebra mit komponentenweiser Multiplikation.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall einer einfachen Körpererweiterung.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 9. Juni 2009, um 15:30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.