Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Stefan Kühnlein
Fabian Januszewski

09.06.2009

# Algebra II - Übungsblatt 8

**Aufgabe 1 (4 Punkte)**
Es sei $A$ eine $n$-dimensionale $\mathbb{Q}$-Algebra und $\mathcal{O} \subseteq A$ ein Teilring. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) $\mathcal{O}$ ist eine Ordnung in $A$.

(b) $\mathcal{O}$ ist ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul und es gilt $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong A$.

(c) Für jede Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ ist $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein $n$-dimensionaler $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-Vektorraum.

**Aufgabe 2 (4 Punkte)**
Es sei $A$ eine endlichdimensionale $\mathbb{Q}$-Algebra und $\mathcal{O} \subseteq A$ eine Ordnung. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x \in \mathcal{O}$ gilt

$$\mathcal{N}(x) \in \mathbb{Z} \quad \text{und } x \text{ teilt (beidseitig) } \mathcal{N}(x) \text{ in } \mathcal{O}.$$

(b) Für alle $x \in \mathcal{O}$ gilt

$$x \in \mathcal{O}^\times \iff \mathcal{N}(x) \in \mathbb{Z}^\times.$$

(c) Aufgabenteil (b) verallgemeinernd gilt sogar

$$|\mathcal{N}(x)| \;=\; (\mathcal{O} : \mathcal{O}x).$$

**Aufgabe 3 (4 Punkte)**
Es sei nun $K/\mathbb{Q}$ eine endliche Körpererweiterung und $\mathcal{O} \subseteq K$ eine Ordnung. Zeigen Sie:

(a) Jedes Ideal $0 \neq \mathfrak{a} \trianglelefteq \mathcal{O}$ hat endlichen Index in $\mathcal{O}$.

(b) Jedes Primideal $0 \neq \mathfrak{p} \trianglelefteq \mathcal{O}$ ist maximal.

**Aufgabe 4 (4 Punkte)**
Es sei $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ mit einer primitiven fünften Einheitswurzel $\zeta \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Diskriminante der Ordnung $\mathbb{Z}[\zeta]$ und geben Sie die Maximalordnung in $K$ an.

**Abgabe** bis spätestens Dienstag, den 16. Juni 2009, um 15:30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.