

Algebra II - Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien $A \subset B$ Integritätsbereiche (also kommutativ und nullteilerfrei und $\neq \{0\}$) und A in seinem Quotientenkörper K ganzabgeschlossen.

Zeigen Sie, daß $b \in B$ genau dann ganz über A ist, wenn b algebraisch über K ist und das (normierte!) Minimalpolynom $f(X) \in K[X]$ von b in $A[X]$ liegt.

Hinweis. Wer sich das Leben schwer machen will, darf voraussetzen, dass A ein Hauptidealring ist. Alle anderen sollten versuchen, Argumente aus der Galoistheorie anzupassen.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Darstellungsring $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}(S_3)$ der symmetrischen Gruppe S_3 zu berechnen. Gehen Sie wie folgt vor:

- Bestimmen Sie alle Isomorphieklassen irreduzibler (komplexer) Darstellungen der S_3 , indem sie die reguläre Darstellung zerlegen.
- Zerlegen sie für jedes Paar (ρ_1, ρ_2) (komplexer) irreduzibler Darstellungen die Darstellung $\rho_1 \otimes \rho_2$ in irreduzible Darstellungen.
- Geben Sie den Darstellungsring der S_3 an.
- Was ändert sich, wenn man Darstellungen über \mathbb{Q} betrachtet?

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Es sei $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ eine Matrix endlicher Ordnung.

Finden Sie ein Skalarprodukt, für das die Multiplikation mit A eine Isometrie ist, und zeigen Sie, dass A und A^{-1} ähnlich sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es bezeichne $\text{SO}(2)$ die Gruppe der (reellen) orientierungserhaltenden orthogonalen 2×2 -Matrizen. Wir betrachten die Darstellung $\rho : \text{SO}(2) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^{2 \times 2})$, welche durch Konjugation gegeben ist. D.h. ein $\alpha \in \text{O}(2)$ operiere auf einem $v \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ via $\rho(\alpha)v := \alpha v \alpha^{-1}$.

- Zeigen Sie, daß alle $\rho(\alpha)$ für $\alpha \in \text{SO}(2)$ simultan diagonalisierbar sind.
- Bestimmen Sie die entsprechenden Eigenräume samt der Eigenwerte.
- Zeigen Sie, daß ρ in eindimensionale (komplexe) Darstellungen zerfällt und geben Sie diese an.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 23. Juni 2009, um 15:30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.