Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Stefan Kühnlein
Fabian Januszewski

23.06.2009

Algebra II - Übungsblatt 10

Es sei G eine endliche Gruppe mit Ordnung n und Klassenzahl $h = \kappa(G)$.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Es sei χ ein komplexer Charakter von G. Zeigen Sie, daß χ nur Werte in $\mathbb{Z}[\zeta]$ annimmt, wobei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine n-te Einheitswurzel ist. Insbesondere ist $\chi(g)$ für jedes $g \in G$ ganzalgebraisch (d.h. ganz über $\mathbb{Z}$).

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{C}[G]$ ist als $\mathbb{C}$-Algebra eine direktes Produkt von Matrizenringen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_h$.

(b) Das Zentrum $Z(\mathbb{C}[G])$ von $\mathbb{C}[G]$ ist isomorph zum direkten Produkt der Zentren $Z(\mathfrak{a}_1), \ldots, Z(\mathfrak{a}_h)$ und insbesondere h-dimensional.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es sei $g_1, \ldots, g_h$ ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen $K_1, \ldots, K_h$ von G. Es bezeichne $k_i := \#K_i$ die Kardinalität der i-ten Konjugationsklasse und wir definieren

$$z_i := \sum_{g \in K_i} g \in \mathbb{C}[G].$$

Sei schließlich ρ eine irreduzible komplexe Darstellung von G der Dimension m mit Charakter χ. Zeigen Sie:

(a) Die Elemente $z_1, \ldots, z_h$ bilden eine $\mathbb{C}$-Basis des Zentrums $Z(\mathbb{C}[G])$.

(b) Es gibt $a_{ijl} \in \mathbb{Z}$ so daß in $\mathbb{C}[G]$

$$z_i z_j = \sum_{l=1}^{h} a_{ijl} z_l.$$

(c) Für jedes $1 \leq i \leq h$ gilt $\rho(z_i) = \alpha_i \cdot \mathbf{1}_m$ mit

$$\alpha_i = \frac{k_i \chi(g_i)}{m}.$$

(d) Die $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ sind ganzalgebraisch.

(e) Es folgt, daß $m \mid n$, denn $\frac{n}{m}$ ist ganzalgebraisch.

bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei k ein Körper und $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ eine k-lineare irreduzible Darstellung einer endlichen Gruppe G. Es bezeichne $\mathrm{Sym}(V)$ den k-Vektorraum der symmetrischen Bilinearformen auf V. Zeigen Sie:

(a) G operiert auf $\mathrm{Sym}(V)$ via

$$(g, \langle\cdot,\cdot\rangle) \quad \mapsto \quad \langle \rho(g)(\cdot), \rho(g)(\cdot)\rangle.$$

(b) Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle \neq 0$ eine G-invariante symmetrische Bilinearform auf V, so ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nichtausgeartet, d.h.

$$\forall v \in V, v \neq 0 : \ \exists w \in V : \quad \langle v, w\rangle \neq 0.$$

(c) Gilt $k = \mathbb{R}$, so existiert auf V ein (bis auf einen Vorfaktor) eindeutig bestimmtes Skalarprodukt, bezüglich welchem G via Isometrien auf V operiert.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 30. Juni 2009, um 15:30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.