

Algebra II - Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Es sei l/k ein Körper, G eine endliche Gruppe und $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_l(V)$ eine endlichdimensionale l -lineare Darstellung. Wir sagen, daß ρ über k *definiert* ist, wenn es einen k -Vektorraum $V_k \subseteq V$ gibt, sowie einen Gruppenhomomorphismus $\rho_k : G \rightarrow \text{Aut}_k(V_k)$, so daß wir einen von der Inklusion $V_k \subseteq V$ induzierten Isomorphismus

$$l \otimes_k V_k \cong V$$

von l -Vektorräumen haben, welcher zugleich ein Isomorphismus von G -Moduln ist. Zeigen Sie:

- (a) Die Darstellung ρ ist genau dann über k definiert, wenn es eine l -Basis B von V gibt, bezüglich welcher sämtliche Abbildungsmatrizen der Automorphismen $\rho(g)$, $g \in G$, Einträge in k haben.
- (b) Der Charakter χ einer über k definierten Darstellung ρ nimmt Werte in k an.
- (c) Ist H eine Untergruppe von G , τ eine über k definierte Darstellung von H , dann ist die auf G induzierte Darstellung ebenfalls über k definiert.
- (d) Die Umkehrung der Aussage aus (b) gilt im Allgemeinen nicht.
- (e) Die reguläre Darstellung von G über k ist stets über dem in k enthaltenen Primkörper definiert.
- (f) Jede endlichdimensionale Darstellung ρ von G in Charakteristik 0 ist über einer endlich algebraischen Erweiterung von \mathbb{Q} definiert.

Bemerkung: Es läßt sich sogar zeigen, daß jedes ρ aus (f) über dem Körper der m -ten Einheitswurzeln definiert ist, wenn m das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen von Element in G bezeichnet (insbesondere gilt $m \mid \#G$).

bitte wenden!

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Es bezeichne D_n die Diedergruppe der Ordnung $2n$, d.h. die Isometriegruppe eines regulären n -Ecks. Es sei $n > 0$ gerade. Es bezeichne C_n eine zyklische Untergruppe der Ordnung n .

- (a) Zeigen Sie, daß D_n bis auf Isomorphie genau 4 eindimensionale Darstellungen besitzt.
- (b) Zeigen Sie, daß jeder nichttriviale eindimensionale Charakter χ von C_n , durch Induktion eine irreduzible zweidimensionale Darstellung von D_n liefert.
- (c) Zeigen Sie, daß wir mittels (b) genau $\frac{n}{2} - 1$ paarweise nichtisomorphe zweidimensionale irreduzible Darstellungen von D_n erhalten.
- (d) Geben Sie ein vollständiges Repräsentantensystem der Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen von D_n an.

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 7. Juli 2009, um 15:30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.