Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Stefan Kühnlein
Fabian Januszewski

07.07.2009

Algebra II - Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei G eine endliche Gruppe, welche transitiv auf einer endlichen Menge M operiere. Es sei weiterhin k ein Körper und es bezeichne V_M den k-Vektorraum der Abbildungen $M \to k$. Wir wissen aus der Vorlesung, daß G auf V_M operiert und wir auf diese Weise eine Darstellung $\rho : G \to V_M$ erhalten. Zeigen Sie:

(a) Bezeichnet χ den Charakter von ρ, so ist $\chi(g)$ die Anzahl der Fixpunkte der Aktion des Elementes $g \in G$ auf M.

(b) Bezeichnet $H \subseteq G$ die Fixgruppe eines beliebigen (aber festen) $m \in M$, so ist ρ isomorph zur induzierten Darstellung $\operatorname{Ind}_H^G k$, wobei k die triviale Darstellung von H bezeichnet.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei l/k eine Galoissche Körpererweiterung und $\rho : G \to \operatorname{Aut}_k(V_k)$ sei eine endlichdimensionale k-lineare Darstellung einer endlichen Gruppe G. Wir definieren $V_l := l \otimes_k V_k$. Wir wissen vom letzten Übungsblatt, daß V_l eine l-lineare Darstellung von G ist. Zeigen Sie:

(a) Die Galoisgruppe $\Gamma := \operatorname{Gal}(l/k)$ operiert auf natürliche Weise auf V_l.

(b) Ist $W_l \subseteq V_l$ ein G-invarianter l-linearer Unterraum, welcher zugleich Γ-invariant ist, d.h. für welchen $\gamma(w) \in W$ für alle $\gamma \in \Gamma$ und $w \in W$, so existiert ein G-invarianter k-linearer Unterraum $W_k \subseteq V_k$ mit $l \otimes_k W_k = W_l$.
Hinweis: Es gilt $W_k = \{w \in V \mid 1 \otimes w \in W_l\}$.

(c) Ist V_k irreduzibel, $W \subseteq V_l$ ein irreduzibler Unterraum und

$$\Gamma_W := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(W) \subseteq W\}$$

der Stabilisator von W, so gilt

$$V_l = \bigoplus_{\gamma\Gamma_W \in \Gamma/\Gamma_W} \gamma(W).$$

(d) Es gilt die Formel

$$(\Gamma : \Gamma_W) \cdot \dim_l W = \dim_k V_k.$$

(e) Ist der Grad $[l : k]$ zu $\dim_k V_k$ teilerfremd, so ist V_l irreduzibel über l.

bitte wenden!

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Es sei k ein Körper und es seien G und H zwei Gruppen. Zeigen Sie die Existenz eines (natürlichen) Isomorphismus

$$k[G] \otimes_k k[H] \cong k[G \times H].$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien k ein Körper, G eine endliche Gruppe und $H \subseteq H' \subseteq G$ seien Untergruppen. Zeigen Sie, daß die Funktoren Ind_H^G und $\mathrm{Ind}_{H'}^G \circ \mathrm{Ind}_H^{H'}$ isomorph sind. Mit anderen Worten: Es existiert ein natürlicher Isomorphismus

$$\mathrm{Ind}_H^G \tau \cong \mathrm{Ind}_{H'}^G \left(\mathrm{Ind}_H^{H'} \tau \right).$$

Abgabe bis spätestens Dienstag, den 14. Juli 2009, um 15:30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau oder vor Beginn der Übung direkt dort.