Gegenbeispiel zu einer Teilaufgabe

Es sei $A := \mathbb{Q}[X]/(X^2) =: \mathbb{Q}(\varepsilon)$, wobei ε die Nebenklasse von X in A ist.

Weiter sei $F \subseteq \mathbb{N}$ die Menge der quadratfreien Zahlen und

$$U := \{\frac{z}{f} \mid z \in \mathbb{Z}, f \in F\}.$$

U ist eine additive Untergruppe von $\mathbb{Q}$, denn der Nenner der Summe zweier solcher Brüche ist das kgV der beiden gegebenen Nenner, also auch quadratfrei.

Nun betrachten wir

$$\mathcal{O} := \{k + u\varepsilon \mid k \in \mathbb{Z}, u \in U\}.$$

Dies ist ein Teilring von A, denn es ist eine additive Untergruppe, die 1 liegt darin, und

$$(k_1 + u_1\varepsilon) \cdot (k_2 + u_2\varepsilon) = k_1k_2 + (k_1u_2 + k_2u_1)\varepsilon \in \mathcal{O}.$$

$\mathcal{O}$ enthält zwar eine $\mathbb{Q}$-Basis von A, ist aber keine Ordnung, da es als $\mathbb{Z}$-Modul nicht endlich erzeugt ist – sonst wären ja die Nenner der Koeffizienten vor ε von Elementen in $\mathcal{O}$ zwangsläufig beschränkt.

Nun sei p eine Primzahl.

Es gilt

$$\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathcal{O}/(p\mathcal{O}).$$

Dabei ist

$$p\mathcal{O} = \{pk + \frac{z}{f}\varepsilon \mid z, k \in \mathbb{Z} \text{ und } f \in F \text{ kein Vielfaches von } p\}.$$

Für $x_1, x_2, x_3 \in A$ gibt es ganze Zahlen $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$, nicht alle 0, sodass

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Wenn alle a_i durch p teilbar sind, dann ist auch

$$\frac{a_1}{p}x_1 + \frac{a_2}{p}x_2 + \frac{a_3}{p}x_3 = 0.$$

Wir dürfen also annehmen, dass eines der a_i nicht durch p teilbar ist. Das aber heißt dann, dass die Restklassen $x_i + p\mathcal{O}$ über $\mathbb{F}_p$ linear abhängig sind. Die $\mathbb{F}_p$-Dimension von $\mathcal{O}/(p\mathcal{O})$ ist also höchstens 2.

Andererseits sind die Elemente $1 + p\mathcal{O}$ und $\frac{1}{p}\varepsilon + p\mathcal{O}$ über $\mathbb{F}_p$ linear unabhängig, denn

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : \ a + \frac{b}{p}\varepsilon \in p\mathcal{O} \iff a, b \in p\mathbb{Z}.$$

Das zeigt, dass

$$\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$$

gilt, und da p beliebig war, sind die Voraussetzungen der Aussage (c) von Aufgabe 1 auf Blatt 8 erfüllt, obwohl $\mathcal{O}$ eine Unordnung ist.